平成 28 年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成 27 年 8 月 1 日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて７枚、解答用紙は６枚である。さらに選択科目確認票１枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の４科目よりなる。このうち、２科目を選択して解答すること。３科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに３枚（大問ごとに１枚）の解答用紙に記入する。
   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入する。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. 配列 A に n 個の数値が格納されているとし、この各要素を $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ と書く。配列 A に対して、アルゴリズム S

```
1    FOR i = 2 TO n DO
2        X ← A[i]
3        j ← i
4        WHILE j − 1 > 0 AND A[j − 1] > X DO
5            A[j] ← A[j − 1]
6            j ← j − 1
7        END WHILE
8        A[j] ← X
9    END FOR
```

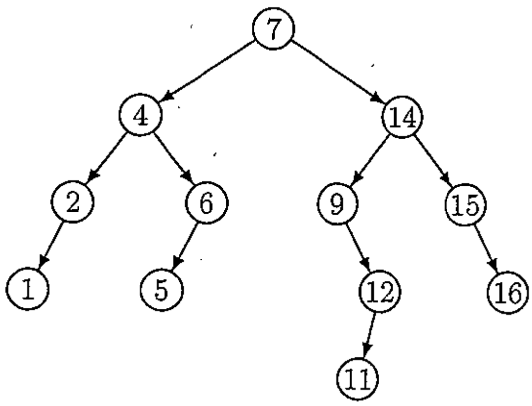
を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $n = 8$, $A[1] = 5$, $A[2] = 8$, $A[3] = 2$, $A[4] = 3$, $A[5] = 9$, $A[6] = 7$, $A[7] = 4$, $A[8] = 6$ であるとし、アルゴリズム S を実行する。8 行目の処理が終わったとき、配列 A の各要素の数値はどうなるか。$i = 2, 3, \ldots, 8$ のすべての場合について示しなさい。

(2) アルゴリズム S において、2 行目、5 行目、8 行目の処理は、配列 A に格納された数値に関する代入操作である。これらの代入操作を実行する回数の総和 m の最小値と最大値を n を用いて表しなさい。

(3) m がアルゴリズム S の時間計算量を代表するとする。アルゴリズム S の時間計算量と配列 A の各要素の数値の並びとの関係を述べなさい。

2. 2 分木 $T = (V, E)$ の各頂点に、相異なる数値を割り当てる。任意の頂点 $v \in V$ について、v の左部分木に含まれる頂点の数値がすべて v の数値より小さく、v の右部分木に含まれる頂点の数値がすべて v の数値より大きいとき、2 分探索木という。下図の 2 分探索木 T について、以下の問いに答えなさい。



（次ページにつづく）

(1) 2 分探索木 T について、各頂点の数値をすべて列挙することを目的として探索アルゴリズムを実行するとき、横型探索を用いる場合、縦型探索を用いる場合のそれぞれについて、列挙される順に各頂点の数値を示しなさい。

(2) 指定された数値を 2 分探索木から削除する手続きを説明しなさい。また、その手続きを用いて、2 分探索木 T から 4 を削除した結果を示しなさい。

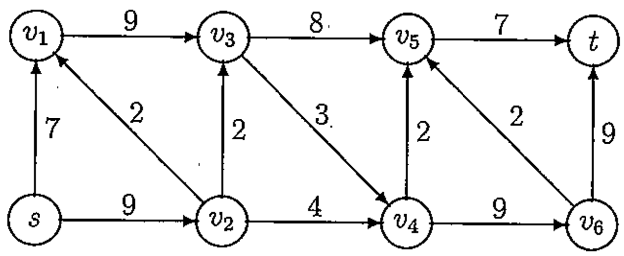
(3) 新たな数値が与えられたとき、それを 2 分探索木に挿入する手続きを説明しなさい。また、その手続きを用いて、2 分探索木 T に 8 を挿入した結果を示しなさい。

(4) (2) および (3) の手続きを用いて、ある数値を削除した後に挿入したら、2 分探索木 T の高さが減少した。そのような数値を一つ示しなさい。

3. 辺 (u,v) に容量 $c(u,v)$ をもつ重み付き有向グラフ $G=(V,E,c)$ と、始点 $s \in V$、終点 $t \in V$ を与える。辺 (u,v) の流量を $f(u,v)$ で表すとき、以下の問いに答えなさい。

(1) s から t への最大流を求める手続きを説明しなさい。ただし、容量はすべて整数とする。

(2) 下図のグラフについて、s から t への最大流を求めなさい。ただし、数字は各辺の容量を表す。



(3) (2) のネットワークを用いて、最大流とカットの関係を説明しなさい。

[数理基礎]

1. 確率変数 X と Y が互いに独立に一様分布 $U(0,1)$ と $U(0,a)$ にそれぞれ従っているものとする。ただし、a は正の実数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) $a \geqq 1$ のとき、X^2 が Y より大きくなる確率 $\Pr(X^2 > Y)$ を求めなさい。

(2) $0 < a < 1$ のとき、X^2 が Y より大きくなる確率 $\Pr(X^2 > Y)$ を求めなさい。

(3) X と Y の組を n 回取り出すとき、X^2 が Y より大きくなる回数を r 回とする。r の分散が最も大きくなるときの a の値を求めなさい。

2. 次の線形計画問題を解きなさい。ただし、$a_i, c_i, i = 1, 2, ..., n$ および b は正の実数とし、最適解はただ一つ存在しているものとする。

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{条件} & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqq b \\
 & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0
\end{array}
$$

3. 2つの正規分布 $N(0,1)$ と $N(\mu,1)$ に従うデータが、ある比率で混ざって観測されている。それぞれの確率密度関数を $f_0(x), f_1(x)$ とすると、観測されるデータ X の確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = (1-w)f_0(x) + wf_1(x)$$

と表すことができる。ただし、$0 < w < 1$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1) X の1次モーメント $E(X)$ を求めなさい。

(2) X の2次モーメント $E(X^2)$ を求めなさい。

(3) w および μ の推定量を $E(X)$ と $E(X^2)$ を用いて表しなさい。

[数学解析]

1. 以下の問いに答えなさい。ただし、i は虚数単位、a は実パラメータである。

(1) 実数 x に対して、極限値 $\lim_{a\to\infty} \tan(x+ia)$ を求めなさい。

(2) $a>1$ に対して、複素平面上の 4 点 $i, \pi+i, \pi+ia, ia$ を頂点とする矩形の周を C_a で表す。複素積分 $\int_{C_a} e^{\pi\tan z}dz$ の値を求めなさい。

(3) 積分 $\int_0^{\pi} e^{\pi\tan(x+i)}dx$ の値を求めなさい。

2. 実数の定数 $a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ に対して、

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とおく。以下の問いに答えなさい。

(1) 実数 t に対して、積分 $I(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(x)dx$ を計算しなさい。

(2) 実変数 t の関数 $I(t)$ の最大値を求めなさい。

3. $x>0$ で定められた 2 回微分可能な関数 $y(x)$ が、微分方程式

$$x^2y'' + xy' - y + \frac{1}{y^3} = 0$$

および、条件 $y(1)=2, y'(1)=\frac{3}{2}$ を満たしている。以下の問いに答えなさい。

(1) $(xy'(x))^2 - y(x)^2 - \frac{1}{y(x)^2}$ は、x によらない定数であることを示しなさい。

(2) $y(x)$ を求めなさい。

[情報物理]

1. 真空中での電荷に関する以下の説明文について、空欄 $\boxed{}$ に入れるべき適切な語句、あるいは、式を答えなさい。なお、$\boxed{}$ のうち、語句の候補が示されているものは適切な語句を選択し、[理由] と書かれているものはその理由を簡潔に記述しなさい。なお、真空の誘電率を ε_0 とする。

   (1) 距離 R だけ離れた二つの点電荷（各電荷量 q、Q）の間に働く力 F は、$\boxed{\text{(a)}}$ と求められる。これは、$\boxed{\text{(b)}}$ の法則と呼ばれる。

   (2) 電荷量 Q の点電荷が原点に置かれている。原点からの距離を R とするとき、点電荷の周囲に形成される電場 $E(R)$ は、$\boxed{\text{(c)}}$ である。このとき、別の点電荷（電荷量 q）が受ける力 F は、$E(R)$ を用いて、$\boxed{\text{(d)}}$ と書かれる。

   (3) (1) と (2) は同じ現象を説明したものである。電磁気学では、力の働き方に関して、(2) の $\boxed{\text{(e) 近接作用・遠隔作用}}$ の考え方を基本とする。

   (4) 半径 a の球内に電荷 Q が一様に分布している。球の中心を原点にとると、半径 R の円周における電場 $E(R)$ は、$R > a$ のとき、$\boxed{\text{(f)}}$、$R < a$ のとき、$\boxed{\text{(g)}}$ と求められる。

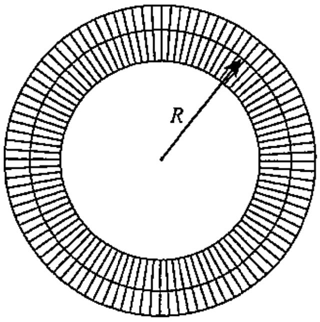
   (5) (4) の球体を金属球に置き換え、電荷 Q を与えた。このときの電場 $E(R)$ は、(4) と比べて $\boxed{\text{(h) 変化する ・ 変化しない}}$。これは、$\boxed{\text{(i) [理由]}}$ ことによる。

2. 電流と磁場の関係について、以下の設問に答えなさい。

   (1) 垂直方向におかれた導線の上向き方向に定常電流 I_0 を流す。このとき、導線の周囲には、どのような向きに磁場が発生するか。

   (2) (1) の電流の方向と磁場の向きの関係を示す法則は何と呼ばれるか。

   (3) 下図に示すようなドーナツ型ソレノイドコイル（導線の全巻き数 N）に、定常電流 I_0 を流す。ソレノイドコイルの内部に、コイルと同じ中心をもつ半径 R の円をとる。円の内部を横切る定常電流の大きさはいくらか。



（次ページにつづく）

(4) (3) のソレノイドコイル内部の中心部分に作られる磁場 $H(R)$ と磁束密度 $B(R)$ を求めなさい。ただし、ソレノイドコイルの内部には透磁率 μ の物質がつめられているものとする。

(5) このソレノイドコイルで作られる磁束密度を大きくするための方法を簡潔に述べなさい。

3. 時間 τ だけ継続する波の連なり（波連）による変位 $f(t)$ が次式で表されている。

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \, e^{i\omega_0 t} & |t| \leqq \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

(1) 変位 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めなさい。ただし、フーリエ変換は次式で定義されるものとする。

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

(2) パワースペクトル $|F(\omega)|^2$ の概形を描きなさい。

(3) (2) の結果より、波連の継続時間 τ とスペクトル形状の関係を簡単に説明しなさい。

(4) 光波の場合、波連の継続時間 τ は可干渉時間と呼ばれる。その名称の由来を、時間的にずれた波連を重ね合わせたときに観測される干渉現象に基づいて説明しなさい。