平成 27 年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成 26 年 8 月 2 日 9:00 – 12:00

（注意）

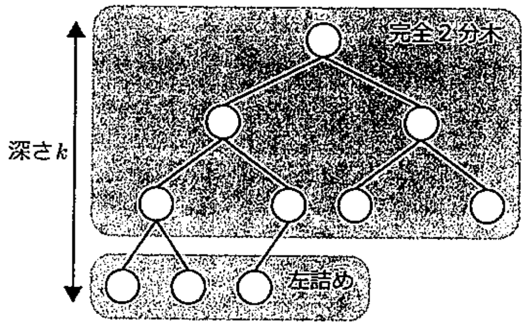
1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて 7 枚、解答用紙は 3 枚である。さらに選択科目確認票 1 枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「確率統計」、「数理計画」、「応用解析」、「情報物理」の 5 科目よりなる。このうち、3 科目を選択して解答すること。4 科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに 1 枚の解答用紙に記入する。
   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・確率統計・数理計画・応用解析・情報物理のいずれか）ならびに受験番号を必ず記入する。
5. 解答用紙の追加は認めない。記入欄が不足する場合は、解答が裏面に続く旨を表面に明記した上で、裏面に記入してもよい。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. ヒープは各頂点 v に値 $f(v)$ が格納された深さ k の2分木で、以下の条件を満たす。

(i) 深さ $k-1$ 以下の部分は完全2分木で、深さ k の頂点は左から順に詰められる。

(ii) 頂点 u が頂点 v の親ならば $f(u) \leqq f(v)$ を満たす。



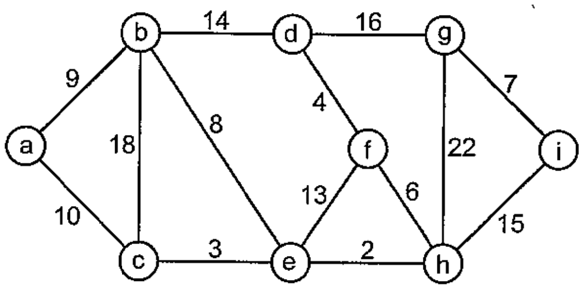
整数が格納された配列 $A = \{0, 18, 14, 19, 8, 6, 23, 12, 4\}$ が与えられる。以下の問いに答えなさい。

(1) 配列 A に対してヒープを構築した結果を示しなさい。

(2) 配列 A をヒープソートを用いて昇順に整列する過程を示しなさい。

(3) 整数が格納された長さ n の配列をヒープソートを用いて昇順に整列するのに要する最悪時間計算量をその理由とともに示しなさい。

2. 各辺が重みを持つ連結な無向グラフが与えられる。全ての頂点を繋ぎかつ辺の重み合計が最小となる辺集合は最小全域木と呼ばれる。以下の問いに答えなさい。



(1) 上図のグラフに対する最小全域木を示しなさい。

(2) 一般の連結な無向グラフに対して最小全域木を求めるアルゴリズムを示しなさい。

(3) 頂点が n 個、辺が m 本の連結な無向グラフに対して (2) で示したアルゴリズムを用いて最小全域木を求めるのに要する最悪時間計算量をその理由とともに示しなさい。

[確率統計]

1. ある製品が故障するまでの時間 T が確率密度関数 $f(t) = mt^{m-1}\exp(-t^m)$, $t > 0$ をもつ確率分布にしたがうものとする。ただし、m は正の実数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 故障時間 T の期待値 $E(T)$ と分散 $V(T)$ を、ガンマ関数 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ を用いて表しなさい。

(2) 故障時間 T の分布関数を $F(t)$ とするとき、$\log\log\dfrac{1}{1-F(t)}$ は $\log t$ に比例することを示しなさい。

(3) 時刻 t まで故障しないで、時刻 $(t, t+\Delta t)$ の間に故障する確率

$$\Pr(t < T < t+\Delta t \mid T > t)$$

を考える。このとき、

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Pr(t < T < t+\Delta t \mid T > t)$$

を故障率 $\lambda(t)$ という。故障率 $\lambda(t)$ を求め、故障率が時間に関わらず一定となるときの m の値を求めなさい。

2. 2つの母集団 A, B があり、その母集団分布はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $N(\mu_B, \sigma_B^2)$ とする。母集団 A からは n 個のサンプル $x_{A1}, x_{A2}, \ldots, x_{An}$ が、母集団 B からは m 個のサンプル $x_{B1}, x_{B2}, \ldots, x_{Bm}$ が互いに独立に得られた。以下の問いに答えなさい。

(1) 母集団 A から得られたサンプルの標本平均 $\bar{x}_A = \dfrac{1}{n}(x_{A1} + x_{A2} + \cdots + x_{An})$ のしたがう分布を答えなさい。

(2) 2つの標本平均の差 $\bar{x}_A - \bar{x}_B$ のしたがう分布を答えなさい。

(3) 2つの母分散 σ_A^2, σ_B^2 は未知であるが等分散であるとみなせるとする。このとき、2つの母平均が異なっているかどうかを有意水準 α で検定する方法を答えなさい。

[数理計画]

1. p 個の関数 $g_i^T z + h_i,\ i = 1, 2, \ldots, p$ の最大値を最小化する数理計画問題

$$\begin{array}{lll} M: & \text{最小化} & \max\left\{g_1^T z + h_1, g_2^T z + h_2, \ldots, g_p^T z + h_p\right\} \\ & \text{条件} & z \geqq 0 \end{array}$$

について考える。ただし、$g_i \in \mathbb{R}^\ell,\ h_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, p$ は定数、$z \in \mathbb{R}^\ell$ は変数、$\bullet^T$ は転置である。以下の問いに答えなさい。

(1) 変数 $y \in \mathbb{R}$ を導入し、不等式 $\max\left\{g_1^T z + h_1, g_2^T z + h_2, \ldots, g_p^T z + h_p\right\} \leqq y$ を定義する。変数を $\hat{x} = [\ y \quad z^T\ ]^T$ と置き、定数 $\hat{A} \in \mathbb{R}^{p \times (1+\ell)},\ \hat{b} \in \mathbb{R}^p$ を適切に定め、この不等式を $\hat{A}\hat{x} \leqq \hat{b}$ の形に書き換えなさい。

(2) 定数 $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n$ と変数 $x \in \mathbb{R}^n$ を適切に定め、問題 M を

$$\begin{array}{lll} P: & \text{最小化} & c^T x \\ & \text{条件} & Ax = b, \quad x \geqq 0 \end{array}$$

の形に書き換えなさい。

(3) 問題 M において、$p = 4,\ \ell = 2$ であるとし、

$$g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad g_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_1 = 6, \qquad h_2 = 0, \qquad h_3 = 5, \qquad h_4 = 7$$

とするとき、最適解と最適値を求めなさい。

2. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対する以下の条件 (a), (b) が等価であることを示しなさい。

(a) 任意の $p < q$ と任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対して、f は

$$f((1-\alpha)p + \alpha q) \leqq (1-\alpha) f(p) + \alpha f(q)$$

を満たす。

(b) 任意の $x < y < z$ に対して、f は

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

を満たす。

[応用解析]

1. 複素平面から原点を除いた領域 $\mathcal{D}$ で定義された関数 $f(z) = (\alpha z + 1)e^{1/z}$ を考える。ただし、α は定数とする。同じ領域 $\mathcal{D}$ で複素微分可能な関数 $F(z)$ が $z \neq 0$ について $F'(z) = f(z)$ を満たすとき、$F(z)$ は $\mathcal{D}$ における $f(z)$ の原始関数といわれる。また、$z = 0$ における $f(z)$ の留数を $\mathrm{Res}\,[f(z); 0]$ と書く。以下の問いに答えなさい。

   (1) 特異点 $z = 0$ を中心とする $f(z)$ のローラン展開を求めなさい。また、$\mathrm{Res}\,[f(z); 0]$ を α を用いて表しなさい。

   (2) $f(z)$ が $\mathcal{D}$ における原始関数をもてば $\mathrm{Res}\,[f(z); 0] = 0$ でなければならないことを示しなさい。

   (3) 定数 α を $\mathrm{Res}\,[f(z); 0] = 0$ となるように定める。このとき、$\mathcal{D}$ における $f(z)$ の原始関数で $F(1) = -e$ を満たすものを求めなさい。

2. 微分方程式

$$\left(x^2 - 1\right) y'' + 4xy' + \left(x^2 + 1\right) y = x^2 - \cos x + 1, \qquad -1 < x < 1$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

   (1) 未知関数の変換 $u = (x^2 - 1)y$ を行って、u に関する微分方程式を求めなさい。

   (2) 初期条件

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = a$$

   を満たす解 $y(x)$ を求めなさい。

   (3) (2) で求めた解 $y(x)$ について、$x \to 1$ としたときの極限値

$$\lim_{x \to 1} y(x)$$

   が存在するための a の条件を求めなさい。

[情報物理]

光の回折を説明したフレネルの理論について考える。図1のように、点光源Oを中心とする半径 ρ の球面S上に点Qをとる。球面Sの外側の点Pにおける光学的変位 u_p は

$$u_p = \int_S \frac{Ae^{ik\rho}}{\rho}\frac{Be^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}d\sigma$$

と表すことができる。ただし、r は距離PQ、k は波数、ω は角振動数、t は時間、A は点光源から単位距離だけ離れた場所での振幅である。B は点Qから放出される2次波の振幅変化と位相遅れを表す傾斜因子で、点Qの位置により ∠OQP が 180° から 0° まで変化するのにしたがって $|B|$ は単調減少する。また、距離OPを R、∠POQ を θ、光の波長を $\lambda\ (= 2\pi/k)$ とする。以下の問いに答えなさい。ただし、空欄 $\boxed{}$ には適切な語句、あるいは、式を入れなさい。

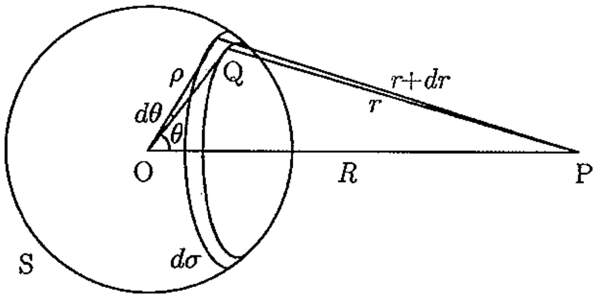


図1

(1) 光学的変位 u_p が表している物理量は $\boxed{\text{(a)}}$ または $\boxed{\text{(b)}}$ の振幅である。

(2) 余弦定理を利用すると、R, ρ, θ を用いて、$r^2 = \boxed{\text{(c)}}$ と表せる。これより、微小量 dr と $d\theta$ の関係は $\boxed{\text{(d)}}$ と求められる。したがって、図1において網掛けで示される輪帯部分の面積 $d\sigma$ は、r, R, ρ, dr を用いて、$d\sigma = \boxed{\text{(e)}}$ と表される。

以上より、光学的変位 u_p は次式で与えられる。

$$u_p = \frac{2\pi Ae^{i(k\rho-\omega t)}}{R}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} Be^{ikr}dr$$

(3) R と ρ を用いると、$r_{\max} = \boxed{\text{(f)}}$, $r_{\min} = \boxed{\text{(g)}}$ と表される。

(次ページにつづく)

$r_m = r_{\min} + \frac{1}{2}m\lambda,\ m = 0, 1, 2, \ldots$ とおき、図2のように、球面Sを r_m によって定まる輪帯に分割する。N 個（N: 奇数）の輪帯に分割されたとして、r_{n-1} と r_n を両端にもつ輪帯から点Pへ伝わる光学的変位を $F_n,\ n = 1, 2, \ldots, N$ とする。

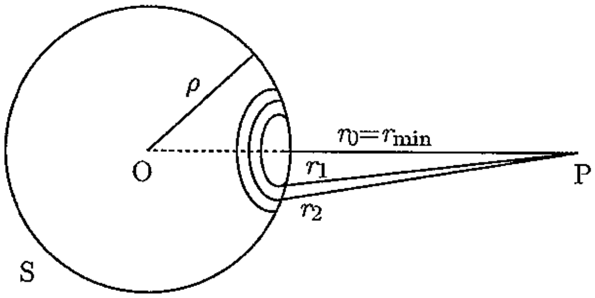


図2

(4) この輪帯は何と呼ばれるか。

(5) 光学的変位 u_p は、各輪帯からの光学的変位 $F_1, F_2, \ldots, F_N$ の総和として得られる。このとき、n が大きくなるとともに $|B|$ はゆっくり減少し、隣りあう輪帯からの光学的変位 F_n と F_{n+1} は位相が π ずれている。この関係を用いて、次式が成り立つことを説明しなさい。

$$u_p = \sum_{n=1}^{N} F_n \approx \frac{F_1}{2} + \frac{F_N}{2}$$

(6) 光学的変位 F_N について、$\angle\mathrm{OQP} \approx 0$ より B はほぼ0とみなせ、$F_N = 0$ とおける。一方、光学的変位 F_1 について、B は定数 B_1 とおける。これらより、光学的変位 u_p を $A, B_1, k, R, t, \lambda, \omega$ を用いて表しなさい。

(7) (6) の結果より、点Oから点Pに向かう光がほぼ直進することを説明しなさい。

(8) 偶数番目の輪帯 $F_2, F_4, \ldots, F_{N-1}$ に相当する部分に輪帯形状の板を置いて光をさえぎった。これにより、点Pにおける光学的変位 u_p がどのように変化するか述べなさい。