平成21年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成20年8月2日 9:00 – 12:00

(注意)

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて6枚、解答用紙は3枚である。さらに科目選択確認票1枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「確率統計」、「数理計画」、「応用解析」、「情報物理」の5科目よりなる。このうち、3科目を選択して解答すること。4科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに1枚の解答用紙に記入する。
   解答用紙には，試験科目（解答する選択科目名：情報基礎・確率統計・数理計画・応用解析・情報物理のいずれか）ならびに受験番号を必ず記入する。
5. 解答用紙の追加は認めない。記入欄が不足する場合は、解答が裏面に続く旨を表面に明記した上で、裏面に記入してもよい。
6. 科目選択確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

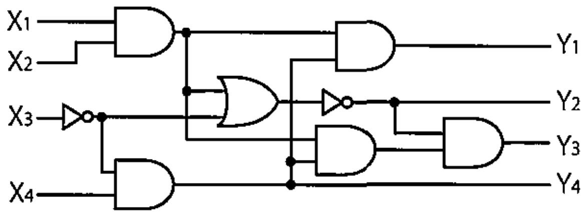
1. 探索アルゴリズムに関する以下の問いに答えなさい。

(1) 縦型探索と横型探索のアルゴリズムをそれぞれ書きなさい。

(2) 縦型探索と横型探索のアルゴリズムの特徴をそれぞれ示しなさい。

(3) 縦型探索と横型探索の特徴を併せ持つ探索アルゴリズムとして反復深化探索アルゴリズムがある。このアルゴリズムを説明しなさい。

2. 次の多入力多出力回路について、それぞれの出力を簡単化したブール形式の積和形で表しなさい。



3. {18 37 21 14 7 12 19 6} という配列Aがある。

(1) 配列Aをクイックソートにて昇順にソートする過程を説明しなさい。

(2) 要素数をnとするときのクイックソートの平均計算量を書きなさい。

(3) 要素数をnとするときのクイックソートの最悪計算量を書きなさい。また、どのような配列のときに最悪計算量となるかを示しなさい。

[確率統計]

1. 2変数 X_1, X_2 が独立でそれぞれ標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、変数変換

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= e^{-\frac{X_1^2+X_2^2}{2}} \\
Y_2 &= \frac{1}{2\pi}\tan^{-1}\frac{X_2}{X_1}
\end{aligned}
$$

で与えられる2変数 Y_1, Y_2 を考える。

(1) 2変数 Y_1, Y_2 は独立でそれぞれ一様分布 $U(0,1)$ に従うことを示しなさい。

(2) 2変数 Y_1, Y_2 の最大値 $Z = \max\{Y_1, Y_2\}$ の平均と分散を求めなさい。

2. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を母数 θ のベルヌーイ分布からの無作為標本とする。定義域は $\{0,1\}$、確率関数は $p(1) = \theta, p(0) = 1-\theta$ である。

(1) 母数 θ の最尤推定量を求めなさい。

(2) 母数 θ の最尤推定量が母数 θ の不偏推定量となることを示しなさい。

(3) 母数 θ の不偏推定量 $\hat{\theta}$ の分散 $V[\hat{\theta}]$ の下限はクラメール・ラオの不等式

$$V[\hat{\theta}] \geqq \frac{1}{nI(\theta)}$$

で与えられる。$I(\theta)$ を求めなさい。

(4) 母数 θ の最尤推定量が母数 θ の有効推定量となることを示しなさい。

[数理計画]

1. 次の線形計画問題を考える。

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
 & \text{条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

ただし、$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 行列、$\boldsymbol{b}$ は m 次元ベクトル、$\boldsymbol{c}$ は n 次元ベクトル、$\boldsymbol{x}$ は n 次元変数ベクトルである。ベクトルは全て列ベクトルとし、^{T} は転置を表す。以下の問いに答えなさい。

(1) 問題 (P) の双対問題 (D) を書きなさい。

(2) 問題 (P) と問題 (D) が共に実行可能解を持つならば、問題 (P) の任意の実行可能解の目的関数値が問題 (D) の任意の実行可能解の目的関数値以上となることを示しなさい。

(3) 問題 (D) が非有界ならば問題 (P) は実行可能解を持たないことを示しなさい。

(4) 次の (a), (b) のうち、常にいずれか一方のみが成り立つことを示しなさい。

(a) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$ に解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

(b) $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} > 0$ に解 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ が存在する。

2. 平面上に辺が交差しないように描かれた単純無向グラフは平面グラフと呼ばれ、平面をいくつかの領域に分割する。ここで平面グラフ G の点の個数を n、辺の個数を m、領域の個数を r(外側の非有界な領域も含む) とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 連結な平面グラフ G は $n - m + r = 2$ を満たすことを示しなさい。

(2) 3 個以上の点を持つ連結な平面グラフ G は $m \leqq 3n - 6$ を満たすことを示しなさい。

(3) 点に接続する辺の数を次数と呼ぶ。平面グラフ G には次数が 5 以下の点が少なくとも 1 つ存在することを示しなさい。

(4) 互いに隣接する点が異なる色となるようにグラフの点を彩色する問題を考える。平面グラフ G は 6 色で彩色可能であることを示しなさい。

[応用解析]

1. 連立常微分方程式 $\dfrac{dx_1}{dt} = 2x_2 + kx_3, \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_3, \dfrac{dx_3}{dt} = x_2 + kx_3$ を考える。ただし、$k > 1$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 連立常微分方程式を

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と表すとき、行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と各固有値に対する固有ベクトルを求めなさい。

(2) $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ を求めなさい。

(3) $x_3 \neq 0$ とするとき、$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{x_1(t)}{x_3(t)}$ を求めなさい。

2. 複素関数に関する以下の問いに答えなさい。

(1) 関数 $f(z), g(z)$ が正則で、$f(\alpha) \neq 0$ かつ $g(z)$ が点 α で1位の零点をもつとき、関数 $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ は1位の極 $z = \alpha$ をもち、その留数は $\dfrac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}$ となることを示しなさい。

(2) 複素関数 $f(z) = ze^{iz}$ が正則であることをコーシー・リーマンの方程式を用いて示しなさい。

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4 + 1} dx$ を計算しなさい。

[情報物理]

1. 真空の誘電率を ε_0 とする。d, Q を正の定数として、以下の問いに答えなさい。

(1) 電荷 $Q, -Q$ の2個の点電荷が間隔 $2d$ で真空中に置かれている。2個の点電荷から等距離 $R\,(\geqq d)$ の点における電位および電界の大きさを求めなさい。

(2) 接地された無限平板導体、および、電荷 Q の点電荷が真空中に置かれている。点電荷に面した導体表面に点電荷から下ろした垂線の足をO、垂線の長さを d とする。点電荷に面した導体表面上で点Oから距離 $r\,(\geqq 0)$ にある点における電荷密度を求めなさい。また、この結果を用いて、点電荷に面した導体表面上の全電荷を求めなさい。

2. 部分コヒーレントな波長 λ の光源 (S)、キューブ型のビームスプリッタ (BS)、平面ミラー (M1, M2)、スクリーンを用い、図1のような基本光学系を空気中に構築した。図の左から入射した平面波の光が、ほぼ等距離の径路 P_1 : S → BS → M1 → BS、および、径路 P_2 : S → BS → M2 → BS をたどり、スクリーンで重なって干渉している。径路 P_1 と径路 P_2 をたどった光の進行方向はスクリーン上で角度 θ をなす。BSの表面反射は考慮しなくてよい。空気の屈折率は1とする。以下の問いに答えなさい。

(1) スクリーン上で観測される光強度分布を求めなさい。

(2) 図2に示すような、高さ $\lambda/4$ の段差を持つミラーM3をミラーM1と入れ換えた。このとき、スクリーン上で観測される光強度分布を図示し、その理由を説明しなさい。

(3) 基本光学系のミラーM1を光源のコヒーレンス長よりも長く $-z$ 方向に平行移動させる。このとき、スクリーン上で観測される光強度分布の変化を説明しなさい。

(4) 基本光学系のスクリーンを写真フィルムに取り換え、光強度分布を記録した。現像後、写真フィルムを元の位置に設置し、ミラーM2を取り除いて径路 P_1 の光波のみを照射するとき、写真フィルム後方で観測される光波について説明しなさい。

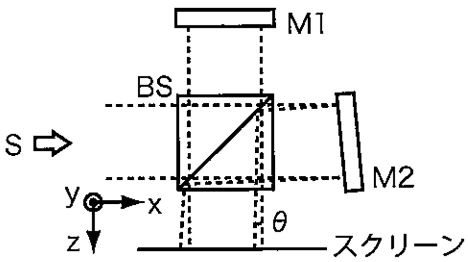


図 1: 基本光学系

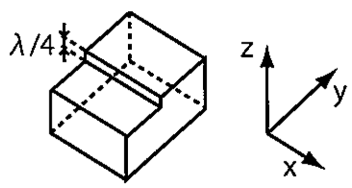


図 2: 段差をもつミラーM3