平成22年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成21年8月1日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題冊子は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題冊子は表紙を含めて **11枚**、解答用紙は **5枚**である。さらに選択問題確認票 **1枚**がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「確率統計」、「数理計画」、「応用解析」、「情報物理」の5分野よりそれぞれ2題、合計10題よりなる。このうち、**5題**を選択して解答すること（ただし5題はどの分野からでも自由に選択してよい）。5題を超えて選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 答案は問題ごとに1枚の解答用紙に記入すること。
   解答用紙には、解答する問題番号（１から１０までの数字）ならびに受験番号を必ず記入すること。
5. 解答用紙の追加は認めない。記入欄が不足する場合は、解答が裏面に続く旨を表面に明記した上で、裏面に記入してもよい。
6. 選択問題確認票には、選択した問題番号欄への○印（5箇所）ならびに受験番号を必ず記入すること。記入した確認票は、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題冊子および解答用紙は持ち帰ってはならない。

$\boxed{1}$ (情報基礎 I)

n 個の要素をもつ配列 A の i 番目の要素を $A[i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ とし、配列の内容を $A = \{A[1], A[2], \ldots, A[n]\}$ と表す。$A = \{15, 10, 3, 21, 14, 19, 8\}$ について、以下の問いに答えなさい。なお、**makeheap**(n) と **remakeheap**(l) のアルゴリズムを図 1 に示す。

(1) n 個の節点をもつ完全 2 分木を考える。根には番号 1、番号 j の節点の左の子には $2j$、右の子には $2j+1$ の番号を与え、節点の番号 i と配列の要素 $A[i]$ を対応づける。A に対して **makeheap**(7) を実行しヒープを構成した。このとき得られる配列を $A_7^{(h)}$ と書くとき、$A_7^{(h)}$ の内容を示しなさい。

(2) $A_7^{(h)}$ の最初と最後の要素 $A_7^{(h)}[1]$ と $A_7^{(h)}[7]$ を交換した配列を改めて A とし、**remakeheap**(6) を実行した。このときに得られる配列の内容を示しなさい。

(3) (2) を参考にして、**remakeheap**(l) を繰り返し用いて降順にソートするアルゴリズムについて説明しなさい。

(4) 配列の要素数を n とするとき、(3) のアルゴリズムの計算量を n を用いて書きなさい。

```
makeheap(n){
  for(k = 1; k ≤ n; k++){
    v ← A[k];
    i ← k;
    j ← ⌊k/2⌋;
    while (j ≥ 1){
      if (A[j] ≥ v){
        A[i] ← A[j];
        i ← j;
        j ← ⌊j/2⌋;
      }
      else {
        break;
      }
    }
    A[i] ← v;
  }
}
```

```
remakeheap(l) {
  v ← A[1];
  i ← 1;
  j ← 2;
  while (j ≤ l){
    if(j < l and A[j] > A[j+1]){
      j ← j + 1;
    }
    if(v > A[j]){
      A[i] ← A[j];
      i ← j;
      j ← 2 * j;
    }
    else{
      break;
    }
  }
  A[i] ← v;
}
```

図 1: アルゴリズム **makeheap**(n) と **remakeheap**(l)　$\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表す。

$\boxed{2}$ （情報基礎 II）

図 1 に示す論理回路（JK フリップフロップ : JKFF）を考える。J、K は入力端子、C はクロック端子であり、q は状態を表す。

(1) この JKFF の真理値表を示しなさい。ただし、J^t、K^t を時刻 t における入力値、q^t はこのときの状態値とし、クロック信号により状態値が q^t から q^{t+1} に遷移するものとする。

(2) この JKFF の特性方程式が $q^{t+1} = \bar{K}^t q^t \vee J^t \bar{q}^t$ となることを示しなさい。

(3) $t = 0$ のとき $J^0 = 0$、$K^0 = 1$ を入力し、$t = 1, 2, 3, \ldots$ のとき $J^t = 1$、$K^t = 1$ を定常入力した。q^t $(t = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ の時間変化を示しなさい。

(4) JKFF を 3 つ連結した図 2 に示す回路において、初期状態として $q_0 = q_1 = q_2 = 0$ に設定した。各 J、K に 1 、JKFF1 の端子 C にはクロック信号を入力するときの動作について説明しなさい。

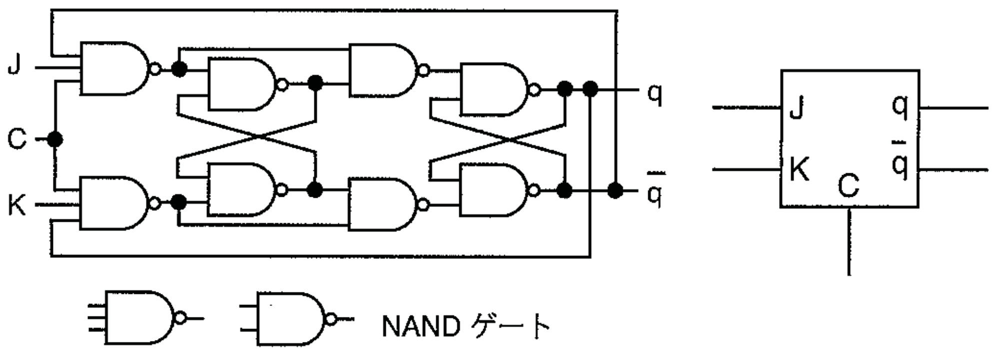


図 1: JK フリップフロップの回路図（左）と簡略化記号（右）

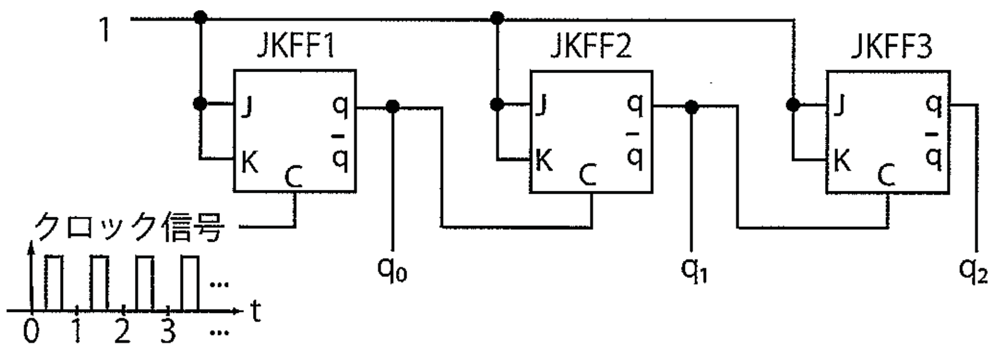


図 2: JK フリップフロップの連結回路

3 (確率統計 I)

ある母集団からランダムに n 個のサンプル $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を取り、その特性値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を調べた。このとき以下の問いに答えなさい。ただし、以下の t 分布の数値表を用いて良い。

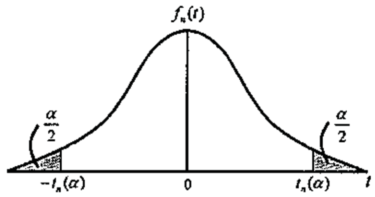
(1) この特性値について、母平均、母分散の不偏推定量を求める式を $n, X_1, X_2, \ldots, X_n$ を用いて表しなさい。

(2) $n = 25$ のとき、特性値 $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ の平均 $\bar{x} = 100.48$、平均からのずれの平方和 $S = 29.04$ であった。この特性値の母平均 $\mu = 100.00$ であると言えるか、適切な仮説を立てて有意水準5%で検定しなさい。

(3) 母平均 μ の 95%信頼区間を求めなさい。

t 分布表

$$\begin{aligned}\alpha &= P(|T| \geq t_n(\alpha)) \\ &= 1 - \int_{-t_n(\alpha)}^{t_n(\alpha)} f_n(t)dt\end{aligned}$$



n (自由度) \ α	0.50	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
10	0.6998	1.2213	1.8125	2.2281	2.6338	3.1693	3.5814
11	0.6975	1.2145	1.7959	2.2010	2.5931	3.1058	3.4966
12	0.6955	1.2089	1.7823	2.1788	2.5600	3.0545	3.4284
13	0.6938	1.2041	1.7709	2.1604	2.5326	3.0123	3.3725
14	0.6924	1.2001	1.7613	2.1448	2.5096	2.9768	3.3257
15	0.6912	1.1967	1.7530	2.1315	2.4899	2.9467	3.2860
16	0.6901	1.1937	1.7459	2.1199	2.4729	2.9208	3.2520
17	0.6892	1.1910	1.7396	2.1098	2.4581	2.8982	3.2225
18	0.6884	1.1887	1.7341	2.1009	2.4450	2.8784	3.1966
19	0.6876	1.1866	1.7291	2.0930	2.4334	2.8609	3.1737
20	0.6870	1.1848	1.7247	2.0860	2.4231	2.8453	3.1534
21	0.6864	1.1831	1.7207	2.0796	2.4138	2.8314	3.1352
22	0.6858	1.1816	1.7171	2.0739	2.4055	2.8188	3.1188
23	0.6853	1.1802	1.7139	2.0687	2.3979	2.8073	3.1040
24	0.6849	1.1789	1.7109	2.0639	2.3910	2.7969	3.0905
25	0.6844	1.1777	1.7081	2.0595	2.3846	2.7874	3.0782
26	0.6841	1.1766	1.7056	2.0555	2.3788	2.7787	3.0669
27	0.6837	1.1757	1.7033	2.0518	2.3734	2.7707	3.0565
28	0.6834	1.1748	1.7011	2.0484	2.3685	2.7633	3.0469
29	0.6830	1.1739	1.6991	2.0452	2.3638	2.7564	3.0380

$\boxed{4}$ (確率統計 II)

各試行での成功の確率を p とするベルヌイ試行を独立に試行することを考える。1 回の試行に Δt の時間がかかるとすると、ちょうど k 回の試行には $k\Delta t$ の時間がかかる。また、$p = \lambda\Delta t$ とする。$k\Delta t = t$ とおいたとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 最初に成功するまでに t より時間が多くかかる確率を求めなさい。

(2) (1) において、ある t の値の下で $k \to \infty (\Delta t \to 0)$ とするとき、初めて成功するまでの時間 X が $X > t$ となる確率 $P(X > t)$ を求めなさい。

(3) X の従う確率密度関数を求めなさい。

(4) X の特性関数 $\phi(\theta) = E[e^{i\theta X}]$ から、その平均、分散を求めなさい。

$\boxed{5}$ (数理計画 I)

tをパラメータにもつ線形計画問題$P(t)$を考える。

$$
\begin{array}{lll}
P(t): & \text{最大化} & (\boldsymbol{c}+t\boldsymbol{d})^T\boldsymbol{x} \\
 & \text{条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\
 & & \boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

ただし、$\boldsymbol{A}$は$m \times n$行列、$\boldsymbol{b}$はm次元ベクトル、$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$は$n$次元ベクトル、$\boldsymbol{x}$は$n$次元変数ベクトルである。ベクトルは全て列ベクトルとし、^{T}は転置を表す。以下の問いに答えなさい。

(1) 集合$\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqq 0\}$は凸集合であることを証明しなさい。

(2) tをある値t_0に固定したとき、問題$P(t_0)$の最適解は凸集合となることを証明しなさい。

(3) 問題$P(t)$の最適値をtの関数とみて$f(t)$とおくとき、$f(t)$は凸関数となることを証明しなさい。

(注1) 集合Sが凸集合$\Longleftrightarrow$
$x_1, x_2 \in S, 0 \leqq \lambda \leqq 1$のとき、$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 \in S$

(注2) 関数$f(x)$が凸関数$\Longleftrightarrow$
$0 \leqq \lambda \leqq 1$のとき、$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \leqq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$

$\boxed{6}$ (数理計画 II)

n 個の点集合 $V = \{1, 2, ..., n\}$ とそれらを結ぶ順序対の枝集合 $E = \{(i,j) | i \in V, j \in V\}$ からなるネットワーク (V, E) を考える。各枝 (i,j) には流すことのできる容量 $a_{ij} (\geqq 0)$ と 1 単位を流すときにかかるコスト c_{ij} が与えられている。以下の問いに答えなさい。

(1) 集合 $A(i) = \{j \in V | (i,j) \in E\}$ と集合 $B(i) = \{j \in V | (j,i) \in E\}$ はそれぞれ何を表しているか。

(2) 次の計画問題 P が、点 1 を入口、点 n を出口としたときに流量 w 単位を流すときにかかるコストが最小となる最小費用流を求める線形計画問題となるように、空欄に適切な記号、数値を記入しなさい。

$$\text{P:}\quad \text{最小化} \quad \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{j \in \boxed{\text{ア}}} x_{ji} - \sum_{j \in \boxed{\text{イ}}} x_{ij} = \begin{cases} \boxed{\text{ウ}} & i = 1 \\ \boxed{\text{エ}} & i = 2, 3, \ldots, n-1 \\ \boxed{\text{オ}} & i = n \end{cases}$$

$$0 \leqq x_{ij} \leqq a_{ij}, (i,j) \in E$$

(3) 問題 P の双対問題 D を書きなさい。

$\boxed{7}$ (応用解析 I)

z についての正則関数 $f(z) = \cos \alpha z + \sin \beta z$ を考える。ただし、α, β は実数で $-\frac{1}{4} \leqq \alpha \leqq \frac{1}{4}$ かつ $-\frac{1}{4} \leqq \beta \leqq \frac{1}{4}$ とする。原点を中心とし半径が 4 の円周 C に沿う積分について、次の２条件

$$\int_C \frac{f(z)}{z+\pi}\, dz = \pi i, \qquad \int_C \frac{f(z)}{z^2(z-\pi)}\, dz = \frac{(3-\pi)i}{3\pi}$$

が成り立つとき α, β の値を定めなさい。

$\boxed{8}$ (応用解析 II)

区間 $[0,\ell]$ 上での拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad 0<x<\ell,\ 0<t<\infty \tag{*}$$

にディィリクレ境界条件

$$u(0,t)=u(\ell,t)=0,\qquad 0<t<\infty \tag{**}$$

を付けた問題を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) (*)、(**) をみたす解で、変数分離 $u(x,t)=U(x)V(t)$ の形をしているものをすべて求めなさい。

(2) (*)、(**) および初期条件

$$u(x,0)=\sin\frac{\pi}{\ell}x-\sin\frac{2\pi}{\ell}x+\sin\frac{3\pi}{\ell}x \tag{***}$$

をみたす解 $u(x,t)$ を求めなさい。

(3) ここで求めた (*)、(**)、(***) をみたす解について、x を固定して $t\to\infty$ としたときの極限値 $\lim_{t\to\infty}u(x,t)$ を求めなさい。

9 (情報物理 I)

遮光板に微小な円形開口を設け、それを通して、物体の像をスクリーン上で観察する。円形開口の半径を a、物体と遮光板との距離を R_0、遮光板とスクリーンとの距離を R、光の波長を λ として、以下の問いに答えなさい。なお、物体面、遮光板、スクリーンはそれぞれ平行に配置されているものとする。

(1) 点光源を物体面に置いたときにスクリーン上で観察される像の広がりを、幾何光学に基づいて求めなさい。

(2) (1) の結果を用いて、一様な明るさの円形の面光源（半径 $a(R_0+R)/R$）を物体面に置いたときにスクリーン上で観察される像の強度分布を求めなさい。

(3) 開口半径 a が小さくなると、波動光学的な取り扱いが必要となる。点光源を物体面に置いたとき、スクリーン上で得られる回折像の概形を示し、点光源の像の広がりを求めなさい。なお、点光源から円形開口、円形開口からスクリーン、いずれの光波伝播においてもフラウンホーファ近似が成り立つものとする。

(4) この装置において、高分解能で物体像を得るための方策を三つあげ、それぞれ理由をあげて説明しなさい。

(5) 円形開口を大口径のレンズに置き換えると、結像性能を大幅に向上させることができる。しかし一方で、この装置の特徴的な性質が失われてしまう。これらの内容について、理由をあげて説明しなさい。

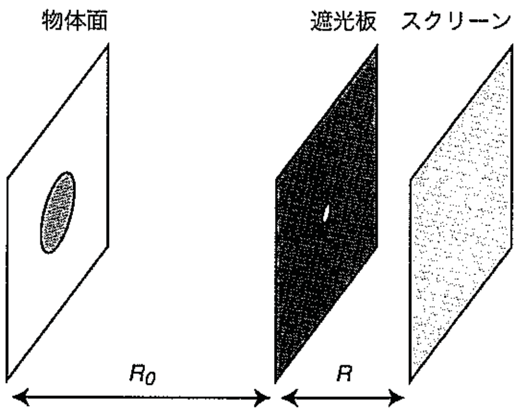


図 1

$\boxed{10}$ (情報物理 II)

図1のように、導体板A、均質な誘電体a (厚さ d_{a}、誘電率 ε_{a})、均質な誘電体b (厚さ d_{b}、誘電率 ε_{b})、導体板B、を隙間なく重ねて平行平板コンデンサを構成する。導体板A、Bの面積を S とし、形状がコンデンサ内部の電場に及ぼす影響は考慮しないものとする。

はじめに、コンデンサを真空中におき、放電後、抵抗0の導線を用いて起電力 V の電源と接続して充電した。

(1) 誘電体a中の電界の強さ E_{a}、誘電体b中の電界の強さ E_{b}、ならびに、誘電体aに面する導体板表面上の電荷の大きさ Q を求めなさい。

(2) 電源による仕事を求めなさい。

つづいて、コンデンサを電源に接続した状態で、図2のように、誘電体a、bの隙間を厚さ方向に広げて幅 d_0 とした。

(3) 真空の誘電率を ε_0 として、誘電体a、bのあいだの真空中の電界の強さを求めなさい。

(4) 誘電体a、bの隙間を広げる前と比較して、コンデンサに蓄えられたエネルギーは増加したか、減少したか。理由をつけて答えなさい。

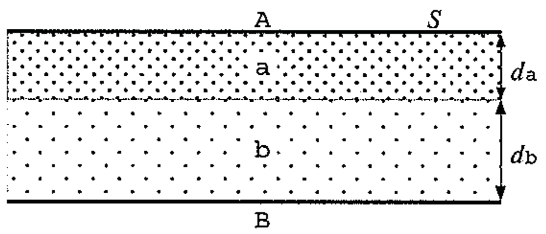


図1

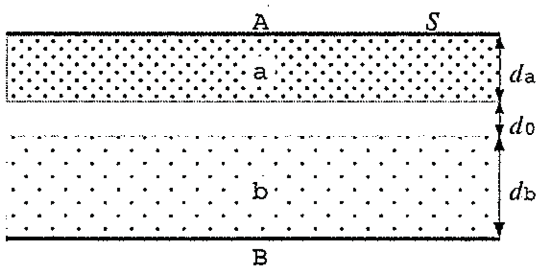


図2