

平成 23 年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成 22 年 7 月 31 日 9:00 - 12:00

(注意)

1. 問題冊子は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題冊子は表紙を含めて 6 枚、解答用紙は 3 枚である。さらに選択問題確認票 1 枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「確率統計」、「数理計画」、「応用解析」、「情報物理」の 5 題よりなる。このうち、3 題を選択して解答すること。3 題を超えて選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 答案は各問題ごとに 1 枚の解答用紙に記入すること。
解答用紙には、解答する問題番号（1 から 5 までの数字）ならびに受験番号を必ず記入すること。
5. 解答用紙の追加は認めない。記入欄が不足する場合は、解答が裏面に続く旨を表面に明記した上で、裏面に記入してもよい。
6. 選択問題確認票には、選択した問題番号欄への○印（3 箇所）ならびに受験番号を必ず記入すること。記入した確認票は、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題冊子および解答用紙は持ち帰ってはならない。

1 [情報基礎]

1. 再帰的アルゴリズムに関する次の問いに答えなさい。

(1) これは自然数 n の階乗を求める関数 (Factorial) の再帰的なプログラムである。

```
Function Factorial(n)
  If n = 0 then
    Factorial = 1
  Else
    Factorial = n × Factorial(n-1)
  End if
End Function
```

これを再帰を使わないプログラムで書くと以下のようなになる。□を埋めなさい。

```
Function Factorial(n)
  F = 1
  For i = 1 to n
    □
  Next i
  Factorial = F
End Function
```

(2) フィボナッチ数列 $\{F(n)\}$ は次のように定義される。

$$F(1) = 1, F(2) = 1, n > 2 \text{ のとき } F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

この時、第 n 項の値を求める再帰的なプログラムを書きなさい。

2. A: [5, 9, 4, 10, 2, 7, 1, 6, 8, 3]、B: [10, 9, 8, 7, 6, 4, 5, 3, 2, 1] という、それぞれ 10 個の要素からなる配列 A、B がある。

(1) A、B をそれぞれクイックソートとマージソートで昇順 (小さい順) にソートする過程を示しなさい。

※なお、クイックソートにおけるピボット (軸要素、基準値とも呼ばれる) は入力列の最初の 2 つの値のうちの大きい方とする。

(2) クイックソートとマージソートにおける、入力列の要素の並び方と、ソートの過程での要素の比較回数との関係について論じなさい。

3. 車のキー閉じ込みとライト消灯の忘れ防止のために、エンジンを停止した段階で、キーを挿入したままあるいはライトを点灯したまま運転席のドアを開けると、ブザーが鳴るしかけがある。

(1) このしかけを実現する論理回路を AND ゲート、OR ゲート、NOT ゲートを用いて示しなさい。

※なお、キーの抜・挿、ライトの消灯・点灯などの状態を下表のように論理値 0 と 1 に対応させる。

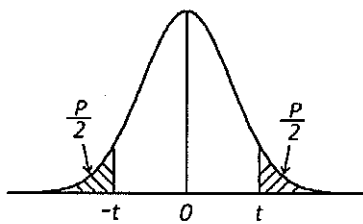
論理値	キー	ライト	エンジン	ドア	ブザー
0	抜く	消灯	停止	閉	鳴らない
1	挿入	点灯	回転	開	鳴る

(2) (1) で示した回路を NAND ゲートのみを用いて示しなさい。

2 [確率統計]

- 1次元の数直線上を運動する動点がある。原点から出発して、確率 p で正の方向に、確率 $1 - p$ で負の方向に1ずつ移動する。 n 回移動したときに、正の方向に移動した回数を X 、動点の位置を Y とする。
 - (1) X と Y の確率分布をそれぞれ求めなさい。
 - (2) X と Y の積率母関数をそれぞれ求めなさい。
 - (3) (2)を用いて、 Y の期待値と分散をそれぞれ求めなさい。
2. ある製品のサイズが正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと仮定される。このとき、この製品のサイズの母平均が7.0より長いかどうかを考える。そこで、16個の標本についてサイズを測定した結果を $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{16}$ としたとき、 $\sum_{i=1}^{16} x_i = 113.6$ 、 $\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 808.96$ であった。なお、解答には必要に応じて以下の数表を利用すること。
 - (1) この製品のサイズの母平均が7.0より長いかどうかを検定したい。適切な仮説を立てて有意水準 $\alpha = 5\%$ で検定しなさい。
 - (2) この製品のサイズの母分散の95%信頼区間を求めなさい。

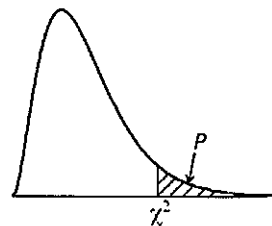
t分布表



自由度 f と P から $t(f, P)$ を求める表

$f \backslash P$	0.10	0.05	0.02	0.01
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.725	2.086	2.528	2.845

χ^2 分布表



自由度 f と P から $\chi^2(f, P)$ を求める表

$f \backslash P$	0.995	0.990	0.975	0.950	0.050	0.025	0.010	0.005
11	2.60	3.05	3.82	4.57	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	31.4	34.2	37.6	40.0

3 [数値計画]

1. 次の線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} P: \quad & \text{最大化 } c^T x \\ & \text{条件 } Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

ただし、 A は $m \times n$ 行列、 b は m 次元ベクトル、 c は n 次元ベクトル、 x は n 次元変数ベクトルである。ベクトルはすべて列ベクトルとし、 c^T は c の転置を表す。問題 P は最適解を持つと仮定し、目的関数の最大値を \bar{f} と表す。また、問題 P に関連して、 m 次元ベクトル u をパラメータとする次の線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} P(u): \quad & \text{最大化 } c^T x - u^T (Ax - b) \\ & \text{条件 } x \geq 0 \end{aligned}$$

問題 $P(u)$ の目的関数の最大値を $\bar{g}(u)$ と表す。ただし、問題 $P(u)$ が有界でない場合は $\bar{g}(u) = \infty$ と定義する。以下の問いに答えなさい。

- (1) 問題 P の双対問題を書きなさい。
- (2) 任意の $u \geq 0$ に対して、 $\bar{g}(u) \geq \bar{f}$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) $\min\{\bar{g}(u) \mid u \geq 0\} = \bar{f}$ が成り立つことを示しなさい。ただし、線形計画問題に対する強双対定理を用いて良い。

2. 点集合 V 、辺集合 E を持つ単純無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。グラフ G が連結でかつ閉路を持たないとき、グラフ G は木と呼ばれる。また、点 $v \in V$ に接続する辺の本数は点 v の次数と呼ばれる。以下の問いに答えなさい。

- (1) グラフ G が木ならば、 $|E| = |V| - 1$ を満たすことを示しなさい。
- (2) $|V| \geq 2$ を満たすグラフ G が木ならば、次数 1 の点を少なくとも 2 個持つことを示しなさい。
- (3) グラフ G の各点 $v \in V$ における次数の最大値を k とする。 $|V| \geq 2$ を満たすグラフ G が木ならば、次数 1 の点を少なくとも k 個持つことを示しなさい。

4 [応用解析]

1. 次の問いに答えなさい。ただし、 x は実数とする。

(1) $0 < r < 1$ のとき、次の関係式が成り立つことを示しなさい。

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin nx = \frac{r \sin x}{1 - 2r \cos x + r^2}$$

(2) $0 < r < 1$ のとき、複素積分 $\int_{|z|=r} \frac{dz}{z(1-z)}$ を計算して、定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r \cos x}{1 - 2r \cos x + r^2} dx$$

を求めなさい。

2. 次の問いに答えなさい。

(1) 完全微分形でない微分方程式 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ が積分因子として $\mu(x, y) = f(x + y)$ をもつための条件は、

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P - Q} = -\frac{f'(u)}{f(u)}$$

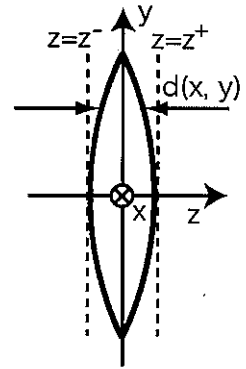
であることを示しなさい。ただし、 $u = x + y$ である。

(2) 微分方程式 $(x + 2y)dx + (y + 1)dy = 0$ を解きなさい。

5 [情報物理]

1. 内部に空洞のない半径 a の球状の導体（導体球）に電荷 $Q (> 0)$ を与え真空中に置いた。真空の誘電率を ϵ_0 、導体球の中心から距離を r として次の問いに答えなさい。
 - (1) 導体球の内部 ($r < a$)、および、外部 ($r > a$) における電場と静電ポテンシャルを求めなさい。
 - (2) 導体球のもつ静電エネルギーを求めなさい。
 - (3) 導体球の外部に点電荷 q ($0 < q \ll Q$) を置いた。十分に時間を経過させた後の導体球表面における電場の向きを理由とともに説明しなさい。ただし、この操作で導体球と点電荷 q は移動しないものとする。
 - (4) 次に、点電荷を取り除き、導体球を別の導体で作られた球殻（内径 b 、 $a < b$ ）で同心状に完全に囲み、導体球と球殻の間を誘電体で満たした。導体球に電荷 Q 、球殻に電荷 $-Q$ を与えたとき、 $r = r_1$ ($a < r_1 < b$) の位置における電場の大きさは (1) と比べて大きいか、小さいか、変わらないか。理由とともに説明しなさい。

2. 屈折率 n の材料の両面を曲率半径が $R_1, R_2 (> 0)$ の球面となるように磨いた両凸レンズを真空中（屈折率:1）に置いた。図はレンズ球面の曲率中心を結んだ直線（光軸）を含むレンズの断面図であり、図のように座標系を定める。このレンズは薄肉レンズとして扱えるものとする。すなわち、光線が $+z$ 方向に進むとき、レンズを通過する直前 ($z = z^-$ 面)、直後 ($z = z^+$ 面) でその光線の x, y 座標は変化せず、位相のみが変調される。このレンズの焦点距離 f は $f = \{(n - 1)(1/R_1 + 1/R_2)\}^{-1}$ と書ける。次の問いに答えなさい。



- (1) $+z$ 方向に進む波長 λ の平面波の光をこのレンズに入射させたとき、レンズ通過前後の光の波面の概略を図示し、説明しなさい。
- (2) (1) のとき、 $z = z^-$ から $z = z^+$ までの区間の光伝搬に対応する光路長の分布 $L(x, y)$ を、レンズの厚さ分布 $d(x, y)$ および $d_0 (= d(0, 0))$ を用いて表しなさい。
- (3) このレンズによる光波の変調分布を表す関数 $t(x, y)$ を f, λ を用いて表しなさい。ただし、 $|x|, |y| \ll R_i$ ($i = 1, 2$) であり、以下の近似を用いてよい。

$$\{1 - (x^2 + y^2)/R_i^2\}^{1/2} \approx 1 - (x^2 + y^2)/(2R_i^2)$$
- (4) 焦点距離が f_1, f_2 の2枚の両凸レンズを、光軸が一致するよう密着させた。(3)の結果を使い、この2枚レンズ系の焦点距離を求めなさい。