平成 24 年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成 23 年 8 月 6 日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて 6 枚、解答用紙は 3 枚である。さらに科目選択確認票 1 枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「確率統計」、「数理計画」、「応用解析」、「情報物理」の 5 科目よりなる。このうち、3 科目を選択して解答すること。4 科目以上を選択 · 解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに 1 枚の解答用紙に記入する。

   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎 · 確率統計 · 数理計画 · 応用解析 · 情報物理のいずれか）ならびに受験番号を必ず記入する。
5. 解答用紙の追加は認めない。記入欄が不足する場合は、解答が裏面に続く旨を表面に明記した上で、裏面に記入してもよい。
6. 科目選択確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. 整数が格納された配列を整列する問題を考える。ただし、配列の 2 つの要素の値は $O(1)$ 時間で比較できるものとして、アルゴリズムの時間量をその比較回数で評価する。以下の問いに答えなさい。

(1) 整数が格納された長さ n_1 の配列 A_1 と長さ n_2 の配列 A_2 が与えられる。ここで、配列 A_1 と A_2 は整列済みで、$A_1[1] \leqq A_1[2] \leqq \cdots \leqq A_1[n_1]$、$A_2[1] \leqq A_2[2] \leqq \cdots \leqq A_2[n_2]$ を満たすとする。このとき、配列 A_1 と A_2 を $A[1] \leqq A[2] \leqq \cdots \leqq A[n_1+n_2]$ を満たす長さ n_1+n_2 の配列 A に併合する最悪時間量が $O(n_1+n_2)$ となるアルゴリズムを示しなさい。

(2) 整数が格納された長さ n の配列 B が与えられる。ここで、配列 B は整列されていないものとする。このとき、配列 B を $B[1] \leqq B[2] \leqq \cdots \leqq B[n]$ を満たすように整列する最悪時間量が $O(n \log n)$ となるアルゴリズムを示しなさい。

2. 次の真理値表で与えられる 4 変数の論理関数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を実現する論理回路を構成する問題を考える。ただし、$i = 1, 2, 3, 4$ に対して x_i と $\bar{x}_i$ が入力として利用できるものとする。以下の問いに答えなさい。

x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

(1) 関数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ の式を論理和標準形 (加法標準形、積和標準形、極小項表現などとも呼ばれる) で表しなさい。

(2) (1) で求めた式に対するカルノー図を用いて、式を簡単化しなさい。また、簡単化された関数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ を実現する論理回路を示しなさい。ただし、論理回路の構成には AND ゲートと OR ゲートが利用できるものとする。

[確率統計]

1. 正の値をとる確率変数 X, Y の同時確率密度関数が

$$f(x,y) = \frac{xy+c}{c+1}e^{-(x+y)}, \quad x>0, y>0$$

で与えられるとする。ただし、c は 0 以上の定数である。以下の問いに答えなさい。

(1) 確率変数 X の周辺密度関数 $f_X(x)$ を求めなさい。

(2) 確率変数 X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めなさい。

(3) 確率変数 X と Y が互いに独立となるときの c の値を求めなさい。

(4) 確率変数 X と Y の相関が最も大きくなるときの c の値とそのときの相関係数の値を求めなさい。

2. ある確率 p で生起するベルヌーイ試行を独立に行うとき、生起するまでの試行回数を X とおく。この操作を n 回繰り返したとき、試行回数 X の値が $x_1, x_2, ..., x_n$ となった。以下の問いに答えなさい。

(1) 確率 p の最尤推定量を求めなさい。

(2) (1) で求めた最尤推定量が不偏推定量となるかどうかを示しなさい。

(3) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = N$ となる確率 $P(N)$ を求めなさい。また、確率 p がある値 p_0 より小さいかどうかを有意水準 5%で検定するときの検定方法について説明しなさい。

[数理計画]

1. パラメータ δ に依存する制約条件をもつ線形計画問題

$$
\begin{aligned}
P_\delta: \quad & 最大化 \quad c^T x \\
& \quad 条件 \quad (A_0 + \delta A_1)x \leqq (b_0 + \delta b_1), \quad \forall \delta \in [-1, 1]
\end{aligned}
$$

を考える。ただし、$A_0 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b_0 \in \mathbb{R}^m$, $b_1 \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は定数、$x \in \mathbb{R}^n$ は変数、$\bullet^T$ は転置である。以下の問いに答えなさい。

(1) 集合 S_δ と集合 S_e を

$$
\begin{aligned}
S_\delta &= \{x \mid (A_0 + \delta A_1)x \leqq (b_0 + \delta b_1),\ \forall \delta \in [-1, 1]\} \\
S_e &= \{x \mid (A_0 - A_1)x \leqq (b_0 - b_1),\ (A_0 + A_1)x \leqq (b_0 + b_1)\}
\end{aligned}
$$

と定義するとき、$x \in S_\delta$ と $x \in S_e$ が同値であることを示しなさい。

(2) パラメータ δ を含まない線形計画問題

$$
\begin{aligned}
P_e: \quad & 最大化 \quad c^T x \\
& \quad 条件 \quad \widetilde{A}x \leqq \widetilde{b}
\end{aligned}
$$

が問題 P_δ と等価となるように、問題 P_e の $\widetilde{A}, \widetilde{b}$ を決めなさい。

(3) 問題 P_e の双対問題を、$\widetilde{A}, \widetilde{b}, c$ を用いて表現しなさい。

(4) $A_0 = [\ 2 \quad 5\ ]$, $A_1 = [\ 0 \quad 3\ ]$, $b_0 = 9$, $b_1 = 3$, $c = [\ 1 \quad 3\ ]^T$ であるとき、問題 P_δ の最適解と最適値を求めなさい。

2. N 個の最適化問題 Q_j, $j = 0, 1, \ldots, N-1$ を

$$
\begin{aligned}
Q_j: \quad & 最小化 \quad \sum_{k=j}^{N-1} (y_k^2 + u_k^2) + y_N^2 \\
& \quad 条件 \quad y_{k+1} = y_k + u_k, \quad k = j, j+1, \ldots, N-1, \quad y_j = x_j
\end{aligned}
$$

とおく。ただし、$u_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{R}$ は変数、$x_j \in \mathbb{R}$ はパラメータである。いま、正数 $p_j \in \mathbb{R}$ を用いて問題 Q_j の最適値を $p_j x_j^2$ と書くと、問題 Q_{j+1} の最適値 $p_{j+1}x_{j+1}^2$ との関係は

$$
p_j x_j^2 = \min_{u_j} \{x_j^2 + u_j^2 + p_{j+1}(x_j + u_j)^2\} \qquad (*)
$$

と表現できる。以下の問いに答えなさい。

(1) $j = N-1$ とした $(*)$ の右辺と問題 Q_{N-1} を比較し、p_N を定めなさい。

(2) $(*)$ の右辺の最適解 u_j を p_{j+1} と x_j で表現しなさい。そして、p_j と p_{j+1} の関係式を求めなさい。

(3) $N = 3$, $x_0 = 1$ とし、問題 Q_0 の最適解 u_0, u_1, u_2 と最適値を求めなさい。

[応用解析]

1. 複素数 $z \neq 0$ についての正則関数 $f(z) = \dfrac{1 + iz - e^{iz}}{z^2}$ を考える。以下の問いに答えなさい。

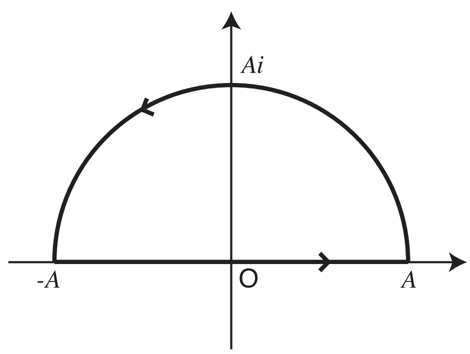
(1) 極限 $\displaystyle\lim_{z \to 0} f(z)$ を求めなさい。この極限値を α で表す。

(2) $f(z)$ の $z = 0$ での値を $f(0) = \alpha$ と定める。したがって $f(z)$ は複素平面全体で定義された関数となる。A を正数とする。$[-A, A]$ は実軸上で点 $-A$ から点 A に至る区間、C_A は原点を中心、半径を A とし点 A から点 $-A$ に至る上半平面内の半円とする。$[-A, A]$ と C_A を併せてできる閉曲線を D_A で表す。積分 $\displaystyle\int_{D_A} f(z)dz$ を求めなさい。

(3) 積分 $\displaystyle\int_{C_A} \frac{1 + iz}{z^2} dz$ を求めなさい。さらに $A \to \infty$ としたときの極限 $\displaystyle\lim_{A \to \infty} \int_{C_A} \frac{1 + iz}{z^2} dz$ を求めなさい。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{A \to \infty} \int_{C_A} \frac{e^{iz}}{z^2} dz$ を求めなさい。

(5) 以上の結果から積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ を求めなさい。



閉曲線 D_A

2. a, b, c を定数として、未知関数 $y = y(x)$ について次の形の微分方程式

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$

の解は $y = x^m$ で求めることができる。ただし m は適切な定数である。$x > 0$ として、以下の問いに答えなさい。

(1) $2x^2y'' - xy' - 2y = 0$ の一般解を求めなさい。

(2) $2x^2y'' - xy' - 2y = 0$ の解で条件 $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$ をみたすものを求めなさい。

(3) $2x^2y'' - xy' - 2y = x$ の一般解を求めなさい。

(4) $2x^2y'' - xy' - 2y = x^2$ の一般解を求めなさい。

[情報物理]

1. 電気量 q $(q > 0)$ の 2 つの点電荷を距離 $2d$ だけ離して真空中に配置する。両電荷の中点を O とし、両電荷を結ぶ線分の垂直二等分面上において、O からの距離を x $(x \geqq 0)$、電界の大きさを $E(x)$ とする。この系について、以下の問いに答えなさい。なお、真空誘電率を ε_0 とする。

(1) $E(x)$ を求めなさい。

(2) $E(x)$ が最大になる距離 x_{max} とその位置での値 E_{max} を求めなさい。

(3) 電気量 Q の新たな点電荷を O に置く。3 つの電荷が平衡になるための条件を求めなさい。

2. 真空中に置かれたガラス球に入射角 θ で波長 λ の光線を入射させる。図に示すように、光線はガラス球の中心を含む平面内を伝搬し、ガラス球の中心から入射点と射出点を見込む角度は 90 度であった。この系について、以下の問いに答えなさい。なお、境界面における反射光は考えないものとする。

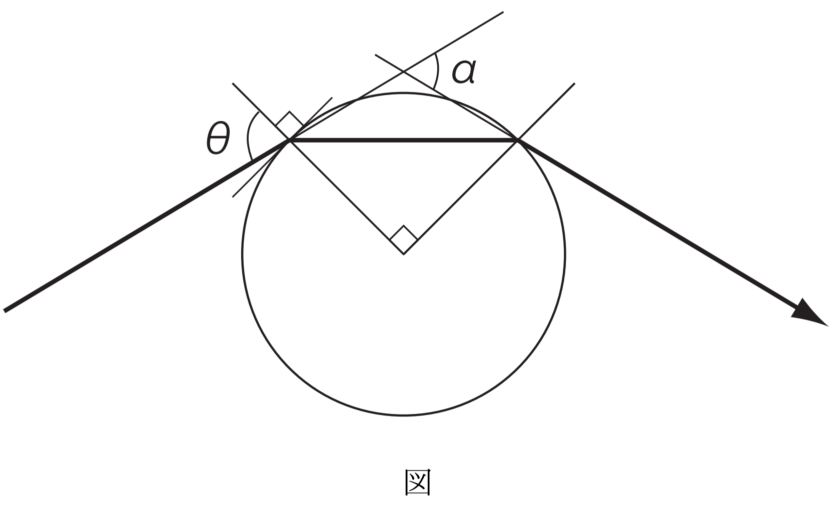
(1) 入射光と射出光がなす角度 α を θ により表しなさい。

(2) ガラス球の屈折率 n を θ により表しなさい。

(3) この光の運動量 p をプランク定数 h を用いて表しなさい。

(4) この系において、ガラス球が光から受ける運動量 p' の大きさを求め、その向きを図示しなさい。

(5) ガラス球より屈折率の高い液体にガラス球を浸し、ガラス球に光線を入射させた。このときに起きる現象について、真空中の場合と対比させて説明しなさい。



図