平成25年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成24年8月4日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて6枚、解答用紙は3枚である。さらに選択科目確認票1枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「確率統計」、「数理計画」、「応用解析」、「情報物理」の5科目よりなる。このうち、3科目を選択して解答すること。4科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに1枚の解答用紙に記入する。

   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・確率統計・数理計画・応用解析・情報物理のいずれか）ならびに受験番号を必ず記入する。
5. 解答用紙の追加は認めない。記入欄が不足する場合は、解答が裏面に続く旨を表面に明記した上で、裏面に記入してもよい。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. 逆ポーランド表記法は数式やプログラムを記述する方法の一種であり、スタックと呼ばれるデータ構造との相性がよい。演算子をオペランド間ではなく、オペランドの後に記述することから後置表記法ともいわれる。「aとbの差にcを乗じる」という演算は中置表記法で記述すると $(a-b)*c$ となり、逆ポーランド表記法では `ab-c*` となる。以下の問いに答えなさい。

(1) 逆ポーランド表記法で表現された式 `ab-c*` の計算アルゴリズムをスタックを用いて説明しなさい。

(2) $(a/(b-c))+d*e$ を逆ポーランド表記法で表現しなさい。

(3) 逆ポーランド表記法で表現された式 `ab-c*def+/-` において、$a=2,\ b=c=d=e=1,\ f=0$のときの演算結果を求めなさい。

2. 要素数nの集合$S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$（要素は整数ですべて異なる）がある。$a_1,a_2,\ldots,a_n$の順に挿入して2分探索木を構築し、この2分探索木を用いて昇順にソートすることを考える。要素の大小比較、予め指定されたノードへの要素の挿入、あるノードからの要素の取り出し（木からの削除）の3つの操作の時間計算量をそれぞれ$\mathrm{O}(1)$とする。アルゴリズムの計算量は、これらのみを考慮して評価する。

(1) 2分探索木を構築するアルゴリズムの計算量が最悪となるのは、$a_1,a_2,\ldots,a_n$にどのような関係があるときか示しなさい。また、そのときの計算量について説明しなさい。

(2) 2分探索木から要素を昇順に取り出すには、ノードをどのように巡回すればよいか。説明しなさい。

(3) 2分探索木の構築とノード巡回により昇順にソートするアルゴリズムの平均計算量について説明しなさい。なお、n個の要素をさまざまな順序で挿入したときの2分探索木の高さの期待値は$\mathrm{O}(\log n)$となることが知られている。また、nが十分大きいとき、$n!$は$\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$と近似できる。

[確率統計]

1. 2つの確率変数 X, Y がある。確率変数 Y が値 y をとるときの確率変数 X は一様分布 $U(0, y)$ に従うものとする。Y が一様分布 $U(0,1)$ に従うとき、以下の問いに答えなさい。

(1) X, Y の同時確率密度関数 $f(x, y)$ および X の周辺密度関数 $f_X(x)$ を求めなさい。

(2) 確率変数 X の期待値と分散を求めなさい。

(3) 確率変数 X が値 a をとったことがわかったとき、確率変数 Y の期待値を求めなさい。

2. 自由度 n のカイ二乗分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geqq 0$$

で与えられる。ただし、$\Gamma(a)$ はガンマ関数で

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

である。以下の問いに答えなさい。

(1) 自由度 n のカイ二乗分布の積率母関数を求めなさい。

(2) 自由度 n のカイ二乗分布の期待値と分散を求めなさい。

(3) 分布の再生性について説明し、カイ二乗分布に再生性があることを示しなさい。

(4) カイ二乗分布以外に再生性をもつ代表的な分布を1つ挙げなさい。

[数理計画]

1. 線形計画問題

$$P: \quad \text{最大化} \quad c^T x_2$$
$$\text{条件} \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 = b, \quad x_1 \geqq 0$$

を考える。ただし、$A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^{n_2}$ は定数、$x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ は変数、$\bullet^T$ は転置である。以下の問いに答えなさい。

(1) 問題 P の双対問題を書きなさい。

(2) 問題 P において

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるとき、$\delta = 1$ とおいて問題 P の最適解と最適値を求めなさい。

(3) 前問について、$\delta = 1$ のときと同じ最適解が得られる $\delta \in \mathbb{R}$ の範囲を求めなさい。

2. 4 点 v_1, v_2, v_3, v_4 をもつ無向グラフを考え、2 点 v_1–v_2, v_1–v_3, v_1–v_4, v_2–v_3, v_2–v_4, v_3–v_4 間の枝の長さをそれぞれ 3, 4, 9, 8, 4, 2 とする。これら v_i–v_j 間の枝の長さを $D^{(0)}(i,j)$ に格納する。いま、$k = 1,2,3,4$ であるとし、

$$D^{(k)}(i,j) = \min\{D^{(k-1)}(i,j), D^{(k-1)}(i,k) + D^{(k-1)}(k,j)\}$$

により $D^{(k-1)}$ を $D^{(k)}$ に更新する。つまり、

$D^{(0)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	4	9
v_2	3	0	8	4
v_3	4	8	0	2
v_4	9	4	2	0

$D^{(1)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	4	9
v_2	3	0	7	4
v_3	4	7	0	2
v_4	9	4	2	0

$D^{(2)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	4	7
v_2	3	0	7	4
v_3	4	7	0	2
v_4	7	4	2	0

である。以下の問いに答えなさい。

(1) $D^{(3)}$ と $D^{(4)}$ を求めなさい。

(2) $D^{(4)}(i,j)$ は点 v_i–v_j 間の最短路の長さとなる。理由を簡潔に述べなさい。

[応用解析]

1. $f(z)$ は複素数 z についての多項式とし、C_r は原点を中心とし半径 r の円周として積分

$$I_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $f(z) = (z+1)^2(z-3)^3(z+5)$ のとき、$I_2,\ I_4,\ I_6$ の値をそれぞれ計算しなさい。

(2) $f(z) = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ で、C_R は $f(z)$ の零点をすべて内部に含むような十分大きな半径 R の円周であるとき I_R を求めなさい。

2. $y = y(x)$ についての微分方程式

$$y'' - 2ay' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{$*$}$$

を考える。ここで $a \geqq 0$ は実数である。すべての x について $y(x) = 0$ である解を自明解、そうでない解を非自明解という。非自明解 $y(x)$ について定数 $p > 0$ が存在し、すべての x について $y(x+p) = y(x)$ となるとき $y(x)$ を周期解、p をその周期という。以下の問いに答えなさい。

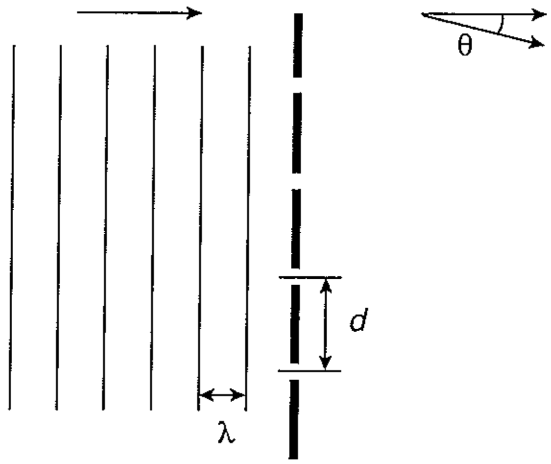
(1) $(*)$ の一般解を求めなさい。

(2) $a = 0$ のとき $(*)$ の非自明解はすべて周期解であることを示し、その周期を求めなさい。

(3) $a > 0$ のとき $(*)$ は周期解をもたないことを、$0 < a < 1,\ a = 1,\ 1 < a < \infty$ の場合に分けて示しなさい。

[情報物理]

図のように、等間隔 d の微小開口をもつ遮光板に対して、波長 λ の単色平面波を垂直入射させると、異なる偏向角 θ で伝播する複数の光波が得られる。この光学素子について、以下の問いに答えなさい。ただし、$d > \lambda$ とする。



(1) 次の説明文の (a) から (e) にあてはまる語句を答えなさい。
この光学素子は＿(a)＿と呼ばれ、波長に応じて偏向角が変化する特性をもつ。同様の働きをする光学素子として、波長に対する物質の＿(b)＿の変化を利用する＿(c)＿も広く用いられている。これらは＿(d)＿素子と呼ばれ、＿(e)＿などに応用される。

(2) ホイヘンス=フレネルの原理に基づいて、開口後方の波面の様子を図示した上で、複数の光波が得られることを説明しなさい。

(3) 開口透過後の偏向角が満たす関係式を求めなさい。

(4) この光学素子の原理を利用して、凸レンズと同等の働きをする素子を作りたい。どのような手法が考えられるか説明しなさい。

(5) 設問 (4) で考えた手法に問題点があれば、その解決策について説明しなさい。

(6) 最先端のレーザー光源では、わずか数波しか持たない超短パルス光を発生できる。このような光を入射光として用いたとき、予想される現象について述べなさい。