

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成25年度大学院前期課程入試問題

(数学)

【注意事項】

- 問題数は5題である。
- 問題紙は表紙を入れて3枚である。
解答用紙は5枚である。裏面も使用してよい。
解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。
解答用紙が不足する場合は追加を申し出ること。
すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
解答用紙は未使用や書き損じも含め、すべて提出すること。
- 試験終了後、問題紙は持ち帰ってよい。

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。

1. 次数が2以下の実係数多項式全体の集合を P_2 とおく。次の P_2 上の変換

$$T: f(x) \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt + \frac{df(x)}{dx}$$

を考える。

- (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ に対して $Tf(x)$ を計算せよ。
(2) $f(x) = 10x + 3$ の時に $T^{100}f(x)$ を求めよ。

2. f を $[a, b]$ で C^2 級とする。次を示せ。

- (1) $0 \leq \lambda \leq 1$, $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ に対し,

$$\begin{aligned} f(c) &= \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) \\ &+ \lambda \int_a^c (a - x)f''(x) dx + (1 - \lambda) \int_c^b (x - b)f''(x) dx. \end{aligned}$$

- (2) $f(a) = f(b) = 0$, $f''(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$) なら, $f(x) \leq 0$ ($x \in [a, b]$).

3. 次の行列に対し、以下の問に答えよ。ここで a は実数である。

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 4a+3 & 3a+2 & 2a+1 \\ 2a+1 & a & 4a+3 & 3a+2 \\ 3a+2 & 2a+1 & a & 4a+3 \\ 4a+3 & 3a+2 & 2a+1 & a \end{pmatrix}$$

(1) $M(a)$ の行列式を求めよ。

(2) $M(a)$ の階数を求めよ。

(3) $\text{Ker } M(a) = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid M(a)x = 0\}$ が $\{0\}$ でないとき、その基底を求めよ。

4. 正数 a に対して次の積分を考える。

$$I(a) = \int_0^\pi \tan(x+ia) dx$$

ここで i は虚数単位である。次の問に答えよ。

(1) $\lim_{a \rightarrow \infty} \tan(x+ia) = i$ を示せ。

(2) 積分値 $I(a)$ は $a > 0$ に依らないことを示せ。

(3) 積分値 $I(a)$ を求めよ。

5. 次の関数の極値を求めよ。

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + x^2 - 2xy + y^2 + 1$$