平成26年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成25年8月3日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて6枚、解答用紙は3枚である。さらに選択科目確認票1枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「確率統計」、「数理計画」、「応用解析」、「情報物理」の5科目よりなる。このうち、3科目を選択して解答すること。4科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに1枚の解答用紙に記入する。

   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・確率統計・数理計画・応用解析・情報物理のいずれか）ならびに受験番号を必ず記入する。
5. 解答用紙の追加は認めない。記入欄が不足する場合は、解答が裏面に続く旨を表面に明記した上で、裏面に記入してもよい。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. 配列 A に n 個の異なる整数が格納されている．以下の問いに答えなさい．

(1) 配列 A の要素を $A[1] < A[2] < \cdots < A[n]$ を満たすように整列するクイックソートの手続きを与えなさい．

(2) (1) で示したクイックソートの最悪時間計算量を示し，それが最悪である理由を述べなさい．ただし，配列の 2 つの要素の値は $\mathrm{O}(1)$ の時間で比較できるものとして，アルゴリズムの時間計算量をその比較回数で評価する．

2. 多重辺と自己ループを持たない連結な無向グラフ $G = (V, E)$ と各枝 $(u, v) \in E$ の長さ $l(u, v) \geqq 0$ および始点 $s \in V$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．

(1) 各頂点 $v \in V$ に対して，$d(v)$ を始点 s から v へのある経路の長さとする．ただし，$d(s) = 0$ とする．このとき，$d(v)$ が s から v への最短経路の長さであるための必要十分条件が

$$d(v) \leqq d(u) + l(u, v), \qquad \forall (u, v) \in E$$

であることを証明しなさい．

(2) 始点 s から各頂点 $v \in V$ への最短経路とその長さを求めるダイクストラ法の手続きを与えなさい．また，得られた経路が最短であることを示しなさい．

[数理計画]

1. 線形計画問題の標準形を

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad c^T x \\ &\text{条件} \quad Ax = b, \quad x \geqq 0 \end{aligned}$$

で定義する．ただし，$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は定数，$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$\bullet^T$ は転置である．以下の問いに答えなさい．

(1) 数理計画問題

$$\begin{aligned} P: \quad &\text{最小化} \quad -x_1 + |x_2| \\ &\text{条件} \quad x_1 + 3x_2 \leqq 1, \quad 2x_1 + x_2 \leqq 3, \quad x_1 \geqq 0 \end{aligned}$$

を線形計画問題の標準形に書き換えなさい．

(2) 問題 P の最適解と最適値を求めなさい．

2. 関数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を対象に次の条件 A を考える．

条件 A : 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対してある $\xi_x \in \mathbb{R}$ が存在し，すべての $y \in \mathbb{R}$ で

$$f(y) - f(x) \geqq \xi_x (y - x)$$

が成り立つ．

以下の問いに答えなさい．

(1) 条件 A を満たす関数 $f(x)$ は，任意の $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$ について

$$(1-\alpha)f(p) + \alpha f(q) \geqq f((1-\alpha)p + \alpha q)$$

を満たすことを示しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \max\{2x^2,\ x^2 + 4\}$$

と定義する．この $f(x)$ が条件 A を満たすことを示しなさい．

[確率統計]

1. 確率変数 X が母数 λ のポアソン分布にしたがうとき，その確率分布は

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

で与えられる．n 個のデータ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が得られたとき，λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は λ の有効推定量であることを示しなさい．

2. n 個の確率変数 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ が互いに独立に平均 $1/\lambda$ の指数分布にしたがうとする．確率変数 $T = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 確率変数 T の期待値と分散を求めなさい．

(2) 確率変数 T の確率密度関数が

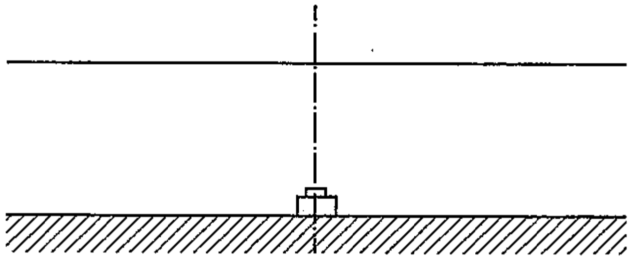
$$f(t) = \frac{\lambda}{(n-1)!} (\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t} \qquad (*)$$

となることを数学的帰納法によって示しなさい．

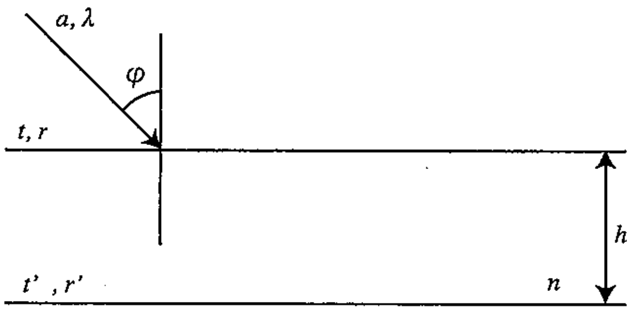
(3) n 回目の事象が生起する時刻が t 以前であるということは，時刻 t までに n 回以上の事象が生起していることと等しい．時刻 t までの生起回数が平均 λt のポアソン分布にしたがうとき，n 回目の事象が生起する時刻 T の確率密度関数は $(*)$ で与えられることを示しなさい．

[情報物理]

1. 水の入った静かなプールの底に，視野角が十分大きい水中カメラを設置し，上方を観測した．このときに観察される現象を定式化し，予想される撮影画像を図示しなさい．ただし，水面と水中カメラの距離を D，空気の屈折率を 1，水の屈折率を 4/3 とする．



2. 空気中に置かれた上下面が平行なガラス板の一点に入射角 φ，波長 λ，振幅 a の光線を入射させる．このときに観察される入射後の光線を図示し，ガラス板を透過する光線の光強度を定式化しなさい．ただし，ガラス板の厚さを h，その屈折率を n，空気の屈折率を 1 とする．また，空気からガラス板への振幅透過率，振幅反射率を t, r，ガラス板から空気への振幅透過率，振幅反射率を t', r' とする．



[応用解析]

1. 以下の問いに答えなさい.

(1) 関数 $f(z)$ は複素数 α を含む領域で正則とし，α は $f(z)$ の零点でその位数は k とする．$z=\alpha$ における関数 $f'(z)/f(z)$ の留数を k を用いて表しなさい.

(2) r を 1 でない正の実数とし，C_r を原点を中心とする半径 r の円周とする．$0<r<1, r>1$ のそれぞれの場合について複素積分

$$\int_{C_r} \frac{z^7}{z^8-1}\,dz$$

を計算しなさい.

(3) $r>1$ のとき定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^{16}-r^8\cos 8\theta}{r^{16}-2r^8\cos 8\theta+1}\,d\theta$$

を計算しなさい.

2. $0<x<\infty$ として，$y(x)$ についての 2 階線形方程式

$$xy''-(4x+1)y'+2(2x+1)y=0 \qquad (*)$$

および $z(x)$ についての非線形方程式

$$xz'-(4x+1)z=xz^2+2(2x+1) \qquad (**)$$

を考える．以下の問いに答えなさい.

(1) $z(x)$ を $(**)$ の任意の解とする．線形方程式 $y'+z(x)y=0$ の一般解 $y(x)$ は $(*)$ を満たすことを示しなさい.

(2) $y(x)$ を $(*)$ の任意の解とする．$y(x)\neq 0$ のとき $z(x)=-y'(x)/y(x)$ は $(**)$ を満たすことを示しなさい.

(3) $y(x)=u(x)e^{2x}$ とおいて，$(*)$ の一般解を求めなさい.

(4) $(**)$ の一般解を求めなさい.