

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成26年度大学院前期課程入試問題

(数学)

【注意事項】

- 問題数は5題である。
- 問題紙は表紙を入れて3枚である。
解答用紙は5枚である。裏面も使用してよい。
解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。
解答用紙が不足する場合は追加を申し出ること。
すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
解答用紙は未使用や書き損じも含め、すべて提出すること。
- 試験終了後、問題紙は持ち帰ってよい。

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。

1. (1) 次の積分の値を求めよ:

$$\iint_D \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dx dy,$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

- (2) $0 < \alpha < 1$ のとき、次の積分の値を求めよ。留数の考え方もよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x + 1} dx$$

2. n を自然数として次の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ を \mathbb{R} 上高々 n 次の多項式とする。このとき、 $0 \leq k \leq n$ をみたす全ての整数 k に対し $f(k) = 0$ であれば $f(x) = 0$ であることを示せ。
- (2) $f(x, y)$ を \mathbb{R} 上高々 n 次の多項式とする。このとき、 $k \geq 0, l \geq 0, k + l \leq n$ をみたす全ての整数の組 k, l に対し $f(k, l) = 0$ であれば $f(x, y) = 0$ であることを示せ。

3. X は実 n 次直交行列で、 $X + I$ が正則とする。ただし、 I は単位行列である。

$$A = (X - I)(X + I)^{-1}$$

とおく。このとき、次を示せ。

- (1) $A = (X + I)^{-1}(X - I)$
(2) A は交代行列
(3) $I - A$ は正則行列
(4) $X = (I + A)(I - A)^{-1}$

4. 極限

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\cos x}{1+x} dx$$

が存在することを示し、次の不等式を証明せよ。

$$\left| \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\cos x}{1+x} dx \right| \leq 1$$

5. α, β を正の実数, θ を実数とし、次の条件をみたす実2次正方行列の列 A_k, B_k ($k = 1, 2, \dots$) を考える。

$$A_k \begin{pmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{pmatrix}$$

$$A_k \begin{pmatrix} -\sin k\theta \\ \cos k\theta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} -\sin k\theta \\ \cos k\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} B_1 = A_1, \\ B_k = A_k B_{k-1} \quad (k \geq 2) \end{cases}$$

- (1) A_k を求めよ。
- (2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k$ が零行列となるための α, β の条件を求めよ。
- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k$ が零行列となるための α, β, θ の条件を求めよ。

平成26年度

受験番号

氏名

【解答欄】

問題