令和２年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

令和元年８月３日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて７枚、解答用紙は６枚である。さらに選択科目確認票１枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の４科目よりなる。このうち、２科目を選択して解答すること。３科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに３枚（大問ごとに１枚）の解答用紙に記入する。
解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入する。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. ソーティングに関する以下の問いに答えなさい。

(1) n 個の正の実数 $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ からなるリスト A がある。以下のアルゴリズム SORT-1(A) によってリスト A の要素をソートするときの時間計算量を求めなさい。

```
SORT-1(A)
  for j ← 2 to n do
    s ← A[j];
    i ← j − 1;
    while i > 0 and A[i] > s do
      A[i + 1] ← A[i];
      i ← i − 1;
    end while
    A[i + 1] ← s;
  end for
```

(2) n 個の正の実数をそれらの最大値で割ることで区間 $(0, 1]$ に正規化した数値 $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ からなるリスト A がある。n 個のリスト $B[1], B[2], \ldots, B[n]$ を用意して、以下のアルゴリズム SORT-2(A) によってリスト A の要素をソートする。$\lceil x \rceil$ は x を切り上げた整数である。

```
SORT-2(A)
  for i ← 1 to n do
    A[i] をリスト B[⌈nA[i]⌉] に挿入する;
  end for
  for i ← 1 to n do
    SORT-1(B[i]);
  end for
  リスト B[1], B[2], ..., B[n] を順に連接する;
```

(i) 数値 $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ が独立に区間 $(0, 1]$ 上に一様分布していると仮定するとき、リスト $B[i]$ に入る要素数の期待値と分散を求め、SORT-1($B[i]$) に必要な平均時間計算量を求めなさい。

(ii) SORT-2(A) にかかる平均時間計算量と最悪時間計算量を求めなさい。

(次ページにつづく)

2. n 桁の正の整数の掛け算に必要となる 1 桁の整数同士の掛け算の回数を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) n が偶数のとき、n 桁の正の整数 x, y を $n/2$ 桁ごとに 2 分割して、$x = a10^{n/2} + b, y = c10^{n/2} + d$ と表すと

$$\begin{aligned} xy &= (a10^{n/2} + b)(c10^{n/2} + d) = ac10^n + (ad + bc)10^{n/2} + bd \\ &= ac10^n + \{ac + bd - (a - b)(c - d)\}10^{n/2} + bd \end{aligned}$$

と変形できるので、xy を計算するためには、$ac, bd, (a - b)(c - d)$ の 3 つの掛け算をすればよい。

このことを利用して、再帰的に 2 分割して掛け算をするときの 1 桁の整数同士の掛け算の回数を $T(n)$ とするとき、$T(n)$ と $T(n/2)$ の関係式を求めなさい。また、$T(n) = \mathrm{O}(n^{\log_2 3})$ となることを示しなさい。

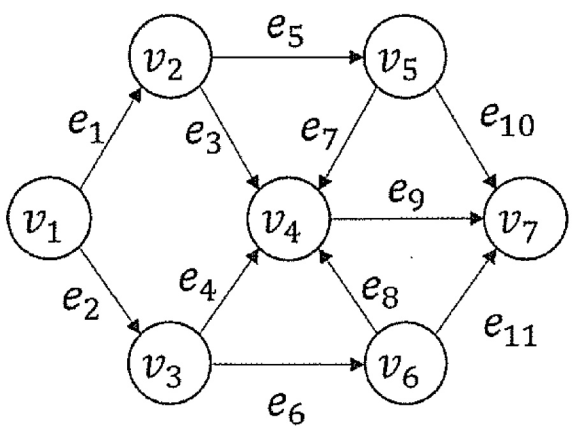
(2) 再帰的に 3 分割して掛け算をするときの 1 桁の整数同士の掛け算の回数を $S(n)$ とするとき、$S(n)$ と $S(n/3)$ の関係式を求めなさい。また、$S(n) = \mathrm{O}(n^{\log_3 6})$ となることを示しなさい。

(3) n が十分大きいとき、$T(n)$ と $S(n)$ の大小を比較しなさい。ただし、$\log_2 3 < 1.6$ を用いてよい。

3. 自己ループを持たない有向グラフ $G = (V, E)$ における接続行列は、$|V| \times |E|$ の行列 $B = (b_{ij})$ で、次の成分を持つ行列である。

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{辺 } e_j \text{ が頂点 } v_i \text{ から出る} \\ 1 & \text{辺 } e_j \text{ が頂点 } v_i \text{ に入る} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

各頂点間に高々1 本の辺しかないとき、BB^T および B^TB の要素はそれぞれ何を表すかを説明しなさい。ただし、^{T} は転置を表す。また、以下のグラフに対して、BB^T および B^TB も求めなさい。



[数理基礎]

1. 線形計画問題

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P:} & \text{最小化} & -2x_1 - 3x_2 \\
 & \text{条件} & 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 12 \\
 & & 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\
 & & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0
\end{array}
$$

について、以下の問いに答えなさい。

(1) 基底解をすべて求め、実行可能基底解を示しなさい。

(2) いま、$x_1 = 0, x_3 = 0$ である実行可能基底解からシンプレックス法を開始するとき、次のステップで得られる実行可能基底解を（複数の可能性がある場合は、それらをすべて）示しなさい。

(3) P の双対問題を示しなさい。

2. ある装置は二つの部品 A, B よりなり、確率変数 X, Y をそれぞれ部品 A、部品 B が故障するまでの年数とする。(X, Y) の同時確率密度関数が

$$
f(x,y) = \begin{cases} ce^{-2(x+2y)} & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}
$$

であるとき、以下の問いに答えなさい。ただし、c は定数である。

(1) c を決めなさい。

(2) X と Y は従属か、それとも独立かを調べなさい。

(3) この装置の寿命（部品 A、部品 B のどちらか一方が故障するまでの年数）が半年以上である確率は何%か。小数点以下第 1 位まで求めなさい。ただし、e の近似値は 2.7183 であることを用いてよい。

3. データ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$ を曲線 $y = ax^2 + bx + c$ に当てはめる問題を考える。そのために、モデル式

$$
y_k = ax_k^2 + bx_k + c + \varepsilon_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, N
$$

を導入する。つまり、入力 x_k に対応する曲線上の値にランダムな誤差 ε_k が加わったものが出力 y_k であるとみなす。各 ε_k が平均 0、分散 σ^2 の正規分布に従って独立に発生しているとするとき、以下の問いに答えなさい。

(1) $y_1, y_2, \ldots, y_N$ の尤度を示しなさい。

(2) 評価関数

$$
J = \sum_{k=1}^{N} (y_k - ax_k^2 - bx_k - c)^2
$$

を最小とする a, b, c は最尤推定量となるか。

[数学解析]

1. 微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx_0}{dt} = -x_0, \qquad x_0(0) = 1,$$
$$\frac{dx_k}{dt} = -x_k + x_{k-1}, \quad x_k(0) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

に対する解 $x_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めなさい。

2. 以下の問いに答えなさい。

(1) $f(x) = e^{-a|x|}$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(w)$ を求めなさい。ただし、$a > 0$ とする。

(2) $\phi(w) = \dfrac{1}{\pi(1 + w^2)}$ とする。n 個の $\phi(w)$ の畳み込み積 $\phi_n(w)$ を

$$\phi_1(w) = \phi(w),$$
$$\phi_n(w) = (\phi_{n-1} * \phi)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{n-1}(w - s)\phi(s)ds \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

により定める。$\phi_n(w)$ を求めなさい。

3. 複素積分 $I = \displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{|z - 2|^2}\, dz$ を求めなさい。

[情報物理]

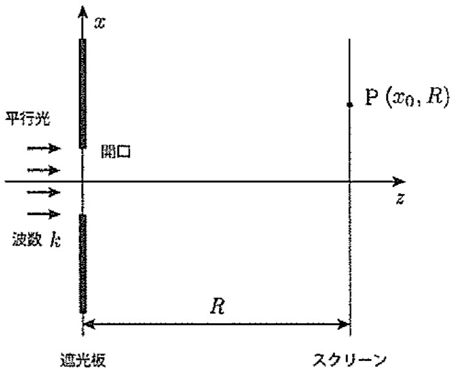
1. 長方形の導体板（面積 S）を真空中に水平に置き、正電荷 Q を与えた。真空の誘電率を ε_0 とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 導体板における電荷の分布状態を説明し、導体板の上部と下部、内部における電場の向きと大きさを求めなさい。

(2) 導体板の上方に、同じ形状で電荷を持たない別の導体板を間隔 d で平行に置いた。各導体板における電荷の分布状態を説明し、これらの導体板で構成される平行板コンデンサーの静電容量と静電エネルギーを求めなさい。

(3) (2) の平行板コンデンサーの上方より水平に保った導体板小片を近づけた。このときに起きる現象と、平行板コンデンサー上での導体板小片の座標を検出する方法について説明しなさい。

2. 図のように、遮光板の開口に平行光（波数 k）を入射させ、距離 R だけ離れたスクリーン上で観察する。開口面に x 軸、光の伝搬方向に z 軸を設定し、y 軸方向の分布は考えないものとする。この光学系において、フレネル回折とフラウンホーファ回折を考える。以下の問いに答えなさい。



(1) 開口内の一点 $(x, 0)$ からスクリーン上の点 P (x_0, R) までの距離 r を求めなさい。

(2) 開口に比較的近い場所で観察する場合、$|x_0 - x| \ll R$ が妥当な条件と考えられる。その理由を述べ、距離 r を $\dfrac{(x_0 - x)^2}{R}$ の項までの近似式で表しなさい。

(3) スクリーン上の点 P での光の変位は $u_{\mathrm{P}} \propto \displaystyle\int_{開口} e^{ikr}dx$ によって与えられる。(2) の条件が満たされる場合の u_{P} を表す式を求め、その物理的意味を説明しなさい。

(4) 開口からさらに離れて観察する場合、x^2 の項も省略できる。$R_0 = \sqrt{R^2 + x_0^2}$ として、この条件下での距離 r の近似式を求めなさい。

（次ページにつづく）

(5) (4) の条件が満たされる場合の u_{P} を表す式を求め、その物理的意味を説明しなさい。

3. z 方向に伝搬する光波を考える。x 方向、y 方向の変位は次式で表されている。

$$E_x = \cos(kz - \omega t)$$
$$E_y = \cos(kz - \omega t + \phi)$$

以下の問いに答えなさい。

(1) $\phi = 0$ のとき、時刻 $t = 0$ における光波の概形を xyz 座標軸とともに図示しなさい。

(2) $\phi = \pi/2$ のとき、時刻 $t = 0$ における光波の概形を xyz 座標軸とともに図示しなさい。

(3) (2) の光波から (1) のような光波に変換する方法を三つあげて説明しなさい。