令和３年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

令和２年８月１日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて８枚、解答用紙は６枚である。さらに選択科目確認票１枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の４科目よりなる。このうち、２科目を選択して解答すること。３科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに３枚（大問ごとに１枚）の解答用紙に記入する。
   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入する。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. N 個の実数が $A[1], A[2], \ldots, A[N]$ に格納された配列 A に対して、以下の整列アルゴリズムを実行する。

$i \leftarrow 0;$
while $i < N$ **do**
  if $i = 0$ **or** $A[i] \leqq A[i+1]$ **then**
    $i \leftarrow i + 1;$
  else
    $\mathrm{swap}(A[i], A[i+1]);$
    $i \leftarrow i - 1;$
  end if
end while

ただし、$\mathrm{swap}(A[i], A[i+1])$ は、$A[i]$ と $A[i+1]$ の値を交換する操作を意味する。また、2 項演算子 **or** は、第 1 項が真であるとき第 2 項を評価することなく真を返すとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 長さ $N = 5$ の配列 $A = \{2, 6, 1, 3, 8\}$ に対して、アルゴリズムを実行する。if 文の条件式が評価される時点での変数 i の値と配列 A の内容を順に答えなさい。

(2) 長さ N の配列 A に対してアルゴリズムを実行するとき、if 文の条件式が評価される回数の最小値 $T_{\mathrm{min}}(N)$ と最大値 $T_{\mathrm{max}}(N)$ を求めなさい。

(3) N 個の相異なる実数がランダムな順序に格納された配列 A に対してアルゴリズムを実行するとき、if 文の条件式が評価される回数の期待値 $T_{\mathrm{ave}}(N)$ を求めなさい。

(次ページにつづく)

2. aを実数、nを正の整数とする。aを掛け合わせてべき乗a^nを求める以下のアルゴリズムにおいて、乗算 $(\times)$ の回数を考える。

```
function Power(a, n)
    if n = 1 then
        return a;
    end if
    r ← Power(a, ⌊n/2⌋);
    r ← r × r;
    if n%2 = 1 then
        r ← r × a;
    end if
    return r;
end function
```

ただし、$\lfloor n/2 \rfloor$ は$n/2$の整数部分、$n\%2$はnを2で割った余りを表し、これらの演算は乗算の回数には含めないものとする。以下の問いに答えなさい。

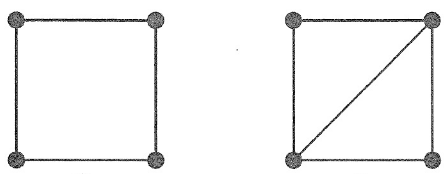
(1) a^5 を求めるときに行われる乗算の回数を答えなさい。

(2) nの2進表記を$b_k b_{k-1} \cdots b_0$とする。すなわち、$b_i \in \{0, 1\}$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ かつ$b_k \neq 0$であり、$n = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} b_i 2^i$ が成り立つ。a^nを求めるときに行われる乗算の回数を、kと$b_0, b_1, \ldots, b_k$を用いて表しなさい。

(3) aを掛け合わせてa^{15}を求めるとき、このアルゴリズムによる乗算回数よりも少ない乗算回数で計算できる方法を示しなさい。

3. N個の頂点 $\{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ を持つグラフGに対して、$T(G) = \mathrm{tr}(A^3)$とする。ただし、N次正方行列$A = (a_{ij})$はGの隣接行列であり、頂点v_iとv_jの間に辺が存在するとき$a_{ij} = 1$、頂点v_iとv_jの間に辺が存在しないとき$a_{ij} = 0$である。また、$\mathrm{tr}(X)$は行列Xの対角和を表す。以下の問いに答えなさい。なお、グラフは多重辺や自己ループを持たないとする。

(1) 以下のグラフG_1とG_2について、それぞれ$T(G_1)$と$T(G_2)$を求めなさい。



G_1　　G_2

(2) 頂点数N $(\geqq 3)$のグラフGが連結で$T(G) > 0$を満たすとき、辺の数の最小値を求めなさい。

(3) 頂点数N $(\geqq 3)$のグラフGに対して、$T(G)$の最大値を求めなさい。

[数理基礎]

1. パラメータ $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ をもつ線形計画問題

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P}(\alpha,\beta) & \text{最小化} & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\
 & \text{条件} & x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = \alpha, \\
 & & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = \beta, \\
 & & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\
 & & x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0, \quad x_4 \geqq 0
\end{array}
$$

について、以下の問いに答えなさい。

(1) x_1, x_2, x_3, x_4 を整数に限るとき、問題 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ が実行可能となる α, β の組をすべて求めなさい。

(2) 問題 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ が実行可能となる α, β の集合を図示しなさい。

(3) 問題 $\mathrm{P}(\alpha,\beta)$ が実行可能となるとき、その最適値を $f(\alpha,\beta)$ とおく。このとき、$\mathrm{P}(\alpha_1,\beta_1)$, $\mathrm{P}(\alpha_2,\beta_2)$ が実行可能であるならば、すべての $\lambda \in [0,1]$ について、問題 $\mathrm{P}(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2)$ が実行可能であり、

$$f(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2) \leqq \lambda f(\alpha_1,\beta_1) + (1-\lambda) f(\alpha_2,\beta_2)$$

であることを示しなさい。

2. xy 平面上の集合 $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$ を考える。この集合上で一様にランダムに点を生成し、その x 座標を確率変数 X、y 座標を確率変数 Y とおく。このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) 確率変数 X, Y の同時確率密度関数を与えなさい。

(2) 確率変数 S, T を

$$S = \sqrt{X^2 + Y^2}, \qquad T = \frac{Y}{X}$$

と定義する。これらの同時確率密度関数を求めなさい。

(3) 確率変数 T の周辺確率密度関数を求めなさい。

(次ページにつづく)

3. 5個のかぼちゃについて、2種の秤X、秤Yを用いて重さを計測し、

$$x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.2, \quad x_3 = 1.1, \quad x_4 = 0.8, \quad x_5 = 1.0,$$
$$y_1 = 1.0, \quad y_2 = 1.1, \quad y_3 = 0.9, \quad y_4 = 0.7, \quad y_5 = 0.9$$

を得た。ただし、x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ は、それぞれ秤X、秤Yにより、第 i 番目のかぼちゃの重さを計測した結果を表すとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 各標本の差 $d_i = x_i - y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ のデータについて、標本平均、標本分散を求めなさい。

(2) 秤X、秤Yの計測に有意差があるか、有意水準 0.05 で検定を行いなさい。ただし、必要であれば、表1を用いてもよい。

表 1: t 分布表

	上側確率		
自由度	0.1	0.05	0.025
1	3.078	6.314	12.706
2	1.886	2.920	4.303
3	1.638	2.353	3.182
4	1.533	2.132	2.776
5	1.476	2.015	2.571
6	1.440	1.943	2.447
7	1.415	1.895	2.365
8	1.397	1.860	2.306
9	1.383	1.833	2.262
10	1.372	1.812	2.228

[数学解析]

1. 非負整数 n に対して、複素積分

$$I_n = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{2n}(z^2+a^2)} dz$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $0 < a < 1$ のとき、I_0 を求めなさい。

(2) $a = 0$ のとき、I_n を求めなさい。

(3) $a > 1$ のとき、$\lim_{n\to\infty} a^{2n}|I_n|$ を求めなさい。

2. 微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (*)$$

を考える。ただし、

$$P(x,y) = x^2y - y^2 - 2x, \qquad Q(x,y) = x^3 - xy + 1$$

とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 次の式が完全微分方程式となるように、積分因子 $\lambda(z)$ を $z = xy$ の関数として定めなさい。

$$\lambda(xy)P(x,y)dx + \lambda(xy)Q(x,y)dy = 0$$

(2) 微分方程式 $(*)$ の一般解を求めなさい。

3. 以下の問いに答えなさい。ただし、i は虚数単位、a は整数でない実数とする。

(1) $f(x) = e^{-iax}$ $(-\pi < x \leqq \pi)$ を周期 2π の周期関数として $-\infty < x < \infty$ に拡張する。この周期関数の複素フーリエ級数展開を求めなさい。

(2) 以下の式が成り立つことを示しなさい。

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$$

[情報物理]

1. 電荷 $\pm q$、間隔 d の電気双極子が真空中に置かれている。座標系や変数を適切に定義し、以下の問いに答えなさい。

(1) 周囲の静電ポテンシャル（静電位）を求めなさい。

(2) 十分離れた点での静電ポテンシャル（静電位）を求めなさい。

(3) (2) の場合の電場を求めなさい。

2. 図1のように、幅 D の広がりをもつ光源から発する単色光（振幅 A, 波数 k）を、距離 r だけ離れた二つのピンホール（間隔 d）を通して、さらに距離 R だけ離れたスクリーン上で観察する。光源の輝度は一様であり、異なる点から出る光の位相関係はランダムである。光源の広がりと二つのピンホールは光軸に対して対称であり、光源面、ピンホール面、スクリーン面では、光軸との交点をそれぞれの原点とする。この光学系について、以下の問いに答えなさい。

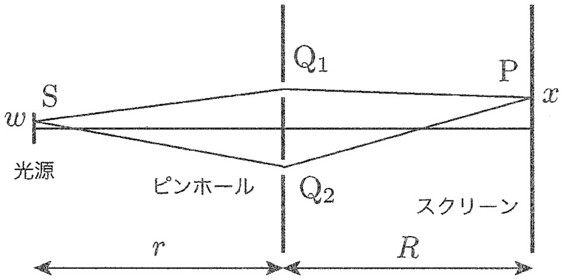


図1

(1) 光源上の点 S（座標 w）から発した光によるスクリーン上の点 P（座標 x）での光強度 $I_0(\mathrm{P})$ は

$$I_0(\mathrm{P}) = 2|A|^2(1+\cos kL)$$

で与えられるものとする。L は二つのピンホールによる光路差で、$r \gg |w|,\ R \gg |x|$ のとき、

$$L = \overline{\mathrm{SQ_2P}} - \overline{\mathrm{SQ_1P}} \approx \frac{wd}{r} + \frac{xd}{R}$$

と近似される。このとき、点 P での光強度 $I(\mathrm{P})$ が次式で求められることを説明しなさい。

$$I(\mathrm{P}) = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} 2|A|^2(1+\cos kL)\,dw$$

(2) 点 P における光強度 $I(\mathrm{P})$ を計算し、$\alpha = \dfrac{kdD}{2r}$ を用いて整理しなさい。

（次ページにつづく）

(3) スクリーン上で観察される縞の鮮明度 Θ を求めなさい。

(4) 変数 α に対する鮮明度 Θ の変化を図 2 に示す。これより、ピンホール面より光源を見込む角度（視直径）$\dfrac{D}{r}$ を求める手順を説明しなさい。

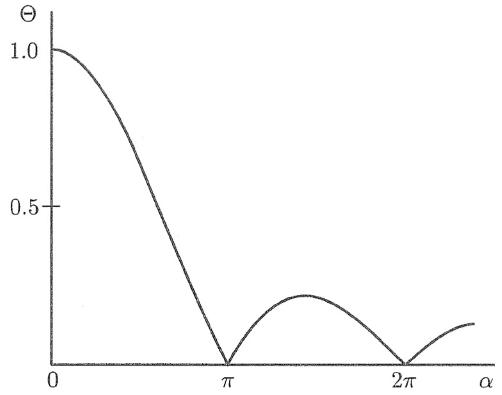


図 2

3. 自然界で見られる色について、それぞれの事例ごとに、関連する光学現象の名称をあげ、発色のしくみを 200 字程度で説明しなさい。

(1) 虹

(2) 夕焼け

(3) タマムシの羽