令和4年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

令和3年7月31日 9:00 - 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて7枚、解答用紙は6枚である。さらに選択科目確認票1枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の4科目よりなる。このうち、2科目を選択して解答すること。3科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに3枚（大問ごとに1枚）の解答用紙に記入すること。
   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入すること。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. 配列 X, Y, Z にそれぞれ n 個の整数値が格納されているとする。アルゴリズム A

```
p ← 0;
for i ← 1 to n do
  for j ← 1 to n do
    for k ← 1 to n do
      if X[i] < Y[j] and Y[j] < Z[k] then p ← p + 1;
    end for
  end for
end for
p を表示する;
```

およびアルゴリズム B

```
X ← sort( X ); Y ← sort( Y ); Z ← sort( Z );
p ← 0;
for j ← 1 to n do
  x_c ← less( X, Y[j] ); z_c ← greater( Z, Y[j] ); [ (*) ];
end for
p を表示する;
```

を考える。ここに sort(D) は配列 D の要素を昇順にソートした配列を返す関数である。また、要素が昇順に並んでいる配列 D と整数値 c に対して、less(D, c) は $D[i] < c$ を満たす要素数を返す関数であり、greater(D, c) は $D[i] > c$ を満たす要素数を返す関数である。以下の問いに答えなさい。

(1) アルゴリズム A は何を求めるものかを説明しなさい。また、その時間計算量のオーダを示しなさい。

(2) アルゴリズム B がアルゴリズム A と同じ機能をもつように、空欄 (*) を埋めなさい。

(3) 関数 sort の時間計算量が $O(n \log n)$ であるとする。アルゴリズム B の時間計算量が $O(n \log n)$ となるように、関数 less および greater のアルゴリズムを与えなさい。

(次ページにつづく)

2. 判定問題 D

n 個の整数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ が与えられたとき、1 または -1 を表す n 個の整数 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ で $\sum_{i=1}^{n} c_i s_i = 0$ を満たすものがあるか

について考える。以下の問いに答えなさい。

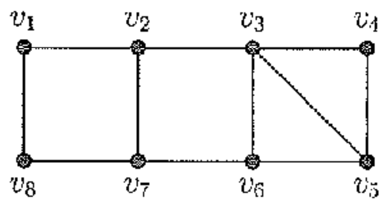
(1) 判定問題 D を解くアルゴリズムを与えなさい。

(2) 前問で与えたアルゴリズムの時間計算量のオーダを示しなさい。

(3) 判定問題 D がクラス NP に属すことを示しなさい。

3. 連結な無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。2 頂点間の道の長さをその道の辺の数で定義し、2 頂点間の距離をそれら頂点を結ぶ最短の道の長さで定義する。任意の 2 頂点間の距離の最大値を G の直径と呼ぶ。他の頂点までの距離の最大値が最も小さくなる頂点を G の中心と呼び、そのときの距離の値を G の半径と呼ぶ。また、各頂点の接続辺の数の最大値を G の最大次数と呼ぶ。以下の問いに答えなさい。

(1) 下図のグラフについて、直径、中心、半径、最大次数を求めなさい。



(2) G の直径を d、半径を r とする。任意の G に対して $\frac{d}{2} \leqq r \leqq d$ は成り立つか。理由とともに答えなさい。

(3) G の最大次数を p、半径を r、頂点の個数を $|V|$ とする。任意の G に対して $|V| \leqq \sum_{i=0}^{r} p^i$ は成り立つか。理由とともに答えなさい。

[数理基礎]

1. X を $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ に値を取る確率変数とする。また、Ω 上の確率分布 P, Q を考え、値 $i \in \Omega$ を取る確率をそれぞれ p_i, q_i で表し、いずれも正とする。さらに、Z を 0 または 1 の値を取る確率変数とし、$X = i$ $(i \in \Omega)$ のときの条件付き確率が

$$\Pr[Z = 1 | X = i] = x_i, \qquad \Pr[Z = 0 | X = i] = 1 - x_i$$

であるとする。このとき、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を適切に定め、条件 $\mathrm{E}_Q[Z] \leqq \theta$ を満たしながら、$\mathrm{E}_P[Z]$ を最大化する問題を考える。ただし、$\theta > 0$ は定数である。E_P, E_Q はそれぞれ確率変数 X が確率分布 P, Q に従うとしたときの期待値を表す。以下の問いに答えなさい。

(1) この問題を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を変数とする線形計画問題として表しなさい。

(2) $\dfrac{p_1}{q_1} > \dfrac{p_2}{q_2} > \cdots > \dfrac{p_n}{q_n}$ とする。(1) の最適解を求めなさい。

(3) (1) の双対問題を示しなさい。

2. n を正の整数とする。n 次元超立方体 $[0, 1]^n$ 上の一様分布から独立に取った 2 点 X, Y 間のユークリッド距離 $D_n = \|X - Y\|$ を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) D_1 の期待値 $\mathrm{E}[D_1]$ と分散 $\mathrm{V}[D_1]$ を求めなさい。

(2) D_1^2 の期待値 $\mathrm{E}[D_1^2]$ と分散 $\mathrm{V}[D_1^2]$ を求めなさい。

(3) D_n^2 の期待値 $\mathrm{E}[D_n^2]$ と分散 $\mathrm{V}[D_n^2]$ を求めなさい。

(4) n が大きくなると D_n^2/n はどのような分布に従うか説明しなさい。

（次ページにつづく）

3. 0または1の値を取る3つの確率変数 X_1, X_2, X_3 を考える。$(x_1, x_2, x_3) \in \{0,1\}^3$ に対して、$(X_1, X_2, X_3) = (x_1, x_2, x_3)$ となる同時確率が

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{Z} \exp(f(x_1, x_2, x_3)), \qquad Z = \sum_{(x_1, x_2, x_3) \in \{0,1\}^3} \exp(f(x_1, x_2, x_3))$$

で与えられるとする。ただし、

$$f(x_1, x_2, x_3) = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 + \theta_{12} x_1 x_2 + \theta_{23} x_2 x_3 + \theta_{31} x_3 x_1$$

であり、$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}$ はパラメータである。以下の問いに答えなさい。

(1) 確率変数の組 (X_1, X_2, X_3) について、N 組の独立なサンプル

$$(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, s_3^{(1)}), (s_1^{(2)}, s_2^{(2)}, s_3^{(2)}), \ldots, (s_1^{(N)}, s_2^{(N)}, s_3^{(N)})$$

が得られたとき、その対数尤度を L とする。このとき

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \sum_{k=1}^{N} s_i^{(k)} - N\mathrm{E}[X_i], \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{ij}} = \sum_{k=1}^{N} s_i^{(k)} s_j^{(k)} - N\mathrm{E}[X_i X_j], \qquad (i, j) = (1,2), (2,3), (3,1)$$

が成立することを示しなさい（いずれか一方の等式を示せば良い）。ただし、E は確率分布 $p(x_1, x_2, x_3)$ に対する期待値を表す。

$N = 16$ 組のサンプルを得た結果、$(0,0,1)$ が2回、$(0,1,0)$ が3回、$(0,1,1)$ が3回、$(1,0,0)$ が2回、$(1,1,0)$ が1回、$(1,1,1)$ が5回出現した。これらのサンプルから最尤推定されたパラメータ値を持つ確率分布 $p(x_1, x_2, x_3)$ について、以下の問いに答えなさい。

(2) $\mathrm{E}[X_1], \mathrm{E}[X_2], \mathrm{E}[X_3], \mathrm{E}[X_1 X_2], \mathrm{E}[X_2 X_3], \mathrm{E}[X_3 X_1]$ を求めなさい。

(3) X_1 と X_2 が独立であること、および X_1 と X_3 が独立であることを示しなさい。

(4) $\mathrm{E}[X_1 X_2 X_3]$ を求めなさい。

[数学解析]

1. 連立微分方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

に対して、以下の問いに答えなさい。

(1) 一般解を求めなさい。

(2) $x(0) = y(0) = 0$ とする。$t \geqq 0$ のとき、点 $(x(t), y(t))$ の動く軌跡の概形を描きなさい。

2. $t > 0$ とするとき、定積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 tx}{x^2 + \pi^2} dx$$

の値を求めなさい。

3. 関数 $\phi_n(x)$ を以下のように定義する。ただし、$0 \leqq x \leqq 1$ とする。以下の問いに答えなさい。

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \phi_{k-1}(2x) & 0 \leqq x < \frac{1}{2} \\ \phi_{k-1}(2x-1) & \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \end{cases}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

(1) 関数 $\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x)$ の概形を描きなさい。

(2) 関数系 $\{1, \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x), \ldots\}$ は正規直交系となることを説明しなさい。

(3) $f(x)$ を $[0, 1]$ 上の関数とする。$g(x) = a_0 + a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + a_3\phi_3(x) + \ldots$ とおいたとき

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \, dx$$

が最小となるような係数 $a_k, k = 0, 1, 2, \ldots$ を求めなさい。

(4) $f(x) = x$ のとき、係数 $a_k, k = 0, 1, 2, \ldots$ を求めなさい。

[情報物理]

1. 次に示すマクスウェル方程式について問いに答えなさい。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=\rho_0(\boldsymbol{x},t) \tag{*1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)=0 \tag{*2}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},t)-\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\boldsymbol{i}_0(\boldsymbol{x},t) \tag{*3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=0 \tag{*4}$$

(1) $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$、ρ_0、$\boldsymbol{i}_0$ が示す物理量と各方程式が表す電磁気学における法則の名称を書きなさい。

(2) 式 (*1), (*2) における右辺の違いが示唆する内容を説明しなさい。

(3) 必要な物理変数を導入し、均質かつ等方な媒質における $\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{H}$ の関係を表しなさい。

(4) 自由空間における電磁波の波動方程式を導きなさい。必要であれば、恒等式 $\mathrm{rot\ rot}\boldsymbol{X}=\mathrm{grad\ div}\boldsymbol{X}-\nabla^2\boldsymbol{X}$ を用いてもよい。

(5) (3) で導入した物理変数を用いて電磁波の速さを表しなさい。

2. 空気中に置かれたガラス（屈折率 n_g）の表面に透明薄膜（屈折率 n_0、厚さ h）が蒸着されている。薄膜表面に平面波（振幅 a_0）を入射させ、薄膜での繰り返し反射の結果、再び空気中に戻る反射光について考える。空気から透明薄膜への境界面における振幅透過率と振幅反射率を t_1, r_1、透明薄膜からガラスへの境界面における振幅透過率と振幅反射率を t_2, r_2 とする。光が逆方向に進む場合の振幅透過率と振幅反射率は $'$ を付けて表す。薄膜内部を 1 往復して空気中に戻る反射光には位相差 δ が生じる。以下の問いに答えなさい。

(1) 薄膜表面での反射光の振幅 a_1、薄膜底面で 1 回反射して空気中に戻る反射光の振幅 a_2 を求めなさい。

(2) ストークスの定理（$r_1'=-r_1,\ t_1t_1'=1-r_1^2$）を用いて、繰り返し反射により空気中に戻る反射光の振幅 a_r と強度 I_r を求めなさい。

(3) $r_1=r_2$ のとき、無反射（$I_r=0$）になる位相差 δ の条件を求めなさい。

(4) 垂直入射の場合、フレネル反射係数より $r_1=\dfrac{1-n_0}{1+n_0}, r_2=\dfrac{n_0-n_g}{n_0+n_g}$ である。このとき、$r_1=r_2$ として、無反射となる n_0, h の条件を求めなさい。ただし、薄膜中での光の波長は λ_0 とする。

3. 自然界で見られる色について、それぞれの事例ごとに、関連する現象の名称をあげ、発色のしくみを 200 字程度で説明しなさい。

(1) 花火

(2) シャボン玉

(3) 牛乳