令和５年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

令和４年７月30日 9:00 − 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて７枚、解答用紙は６枚である。さらに選択科目確認票１枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の４科目よりなる。このうち、２科目を選択して解答すること。３科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに３枚（大問ごとに１枚）の解答用紙に記入すること。
   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入すること。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. m, n を正の整数とする。n 個の正の整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ からいくつかを選んでその合計を m とできるかどうかを判定することを考える。

(1) n 個の整数からの選び方をすべて列挙して、合計が m となることがあるかどうかを判定する場合の計算量を求めなさい。

(2) $0 \leqq k \leqq n$ の整数 k と整数 b に対して、a_1, a_2, ..., a_k からいくつかを選んでその合計を b にできるとき 1 を返し、できないとき 0 を返す以下の関数 $z(k, b)$ を考える。$z(n, m)$ を実行するときの計算量を求めなさい。

```
function z(k, b)
  if k = 0 then
    if b = 0 then
      return 1
    else
      return 0
    endif
  else
    if z(k − 1, b) = 1 or z(k − 1, b − a_k) = 1 then
      return 1
    else
      return 0
    endif
  endif
end function
```

(3) $0 \leqq k \leqq n$ の整数 k と $0 \leqq b \leqq m$ の整数 b に対して、$a_1, a_2, \ldots, a_k$ からいくつかを選んでその合計を b にできるとき 1、できないとき 0 をとる配列 z の要素 $z[k, b]$ を考える。空欄を適切に埋めて $z[n, m]$ を求めるアルゴリズムを完成させ、その計算量を求めなさい。

```
z[0, 0] ← 1
for j ← 1 until m do
  z[0, j] ← 0
end for
for i ← 1 until n do
  for j ← 0 until m do
    ┌──────────────┐
    │              │
    └──────────────┘
  end for
end for
print z[n, m]
```

(次ページにつづく)

2. (1) どの二つの葉の深さの差も 1 以下である二分木を強平衡二分木という。頂点数が n の強平衡二分木の高さは $O(\log n)$ であることを示しなさい。

(2) 強平衡二分木を用いて n 個の数をソートする方法を説明し、その計算量を示しなさい。

3. 頂点の集合 V と辺の集合 E から構成される有向グラフ $G = (V, E)$ を考える。頂点 i から頂点 j への辺があるとき、その辺の長さを c_{ij} とする。始点 s から各頂点へは到達可能であるとする。このとき、始点 s から頂点 j への最短距離を d_j とすると、$j \neq s$ ならば

$$d_j = \min\{d_i + c_{ij} \,|\, (i, j) \in E\}$$

が成立する。

(1) 最短距離が定まらない場合はどのような場合かを示しなさい。

(2) 最短距離が定まる場合、すべての頂点への最短距離を求める手順の概要を説明し、その計算量を $|V|$ と $|E|$ を用いて表しなさい。

(3) 負の長さの辺が存在しない場合、d_j を順番に決めることができる。このとき、すべての頂点への最短距離を求める手順の概要を説明し、その計算量を $|V|$ と $|E|$ を用いて表しなさい。

[数理基礎]

1. 線形計画問題

$$
\begin{array}{llrrrrcr}
\text{P:} & \text{最小化} & -6x_1 & -8x_2 & +7x_3 & -9x_4 & & \\
 & \text{条件} & & 2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 6 \\
 & & -2x_1 & & +x_3 & -4x_4 & \geqq & 8 \\
 & & x_1 & -x_2 & & +2x_4 & \geqq & -7 \\
 & & -3x_1 & +4x_2 & -2x_3 & & \geqq & 9 \\
 & & \multicolumn{6}{c}{x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0, \quad x_4 \geqq 0}
\end{array}
$$

について、以下の問いに答えなさい。

(1) $x_3 = 3, x_4 = 1$ を満たす実行可能解を考える。このとき、x_1, x_2 の条件を求めなさい。

(2) P の双対問題を示しなさい。

(3) P の最適値が 0 であることを説明しなさい。

2. 確率変数 X, Y が互いに独立で、ともに平均が 1 の指数分布に従うとする。$Z = X + Y$ とおく。以下の問いに答えなさい。

(1) Z の確率密度関数を求めなさい。

(2) 確率分布の再生性とは何か。指数分布には再生性があるか。説明しなさい。

(3) $Z = z$ のときの X の条件付き確率密度関数を求めなさい。

3. 母平均が μ で母分散が σ^2 の母集団から標本データ x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ が独立に逐次得られるとき、母平均 μ の推定量 $\hat{\mu}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を差分方程式

$$\hat{\mu}_k = \alpha_k \hat{\mu}_{k-1} + \beta_k x_k, \qquad \hat{\mu}_0 = 1$$

に基づいて定めることを考える。ただし、α_k, β_k $(k = 1, 2, \ldots)$ は定数である。以下の問いに答えなさい。

(1) $\hat{\mu}_1$ が不偏推定量になるように α_1, β_1 を定めなさい。

(2) (1) のように α_1, β_1 を選ぶとき、$\hat{\mu}_2$ が不偏推定量になり、その分散が最小になるように、α_2, β_2 を定めなさい。

(3) (1) (2) のように $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ を選ぶとき、$\hat{\mu}_3$ が不偏推定量になり、その分散が最小になるように、α_3, β_3 を定めなさい。

(4) 逐次的に得られる $\hat{\mu}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ が不偏推定量になり、その分散が最小になるように、α_k, β_k $(k = 1, 2, \ldots)$ を定めなさい。

[数学解析]

1. n を正の整数とする。実数値関数 $x(t)$ に関する微分方程式 $\dfrac{d^n x}{dt^n} = x$ の一般解を求めなさい。

2. 複素数値関数 $\phi(t) = e^{2\pi i t} - 4i\,(1 - |t|)\,t,\ \ -1 \leqq t \leqq 1$ を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $\phi(t)$ が表す曲線の概形を複素平面上に図示しなさい。

(2) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\phi'(t)}{\phi(t)\,(\phi(t) - i)}\,dt$ を求めなさい。

3. 以下の問いに答えなさい。

(1) 以下の関数のフーリエ変換 $\widehat{f}(w)$ を求めなさい。

$$f(t) = \begin{cases} 2 - |t|, & |t| \leqq 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

(2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ を求めなさい。

(3) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}\,dx$ を求めなさい。

[情報物理]

1. 真空の誘電率を ε_0 とする。真空中に2枚の長方形導体板（面積 S）が間隔 d で平行に置かれたコンデンサーを考える。以下の問いに答えなさい。

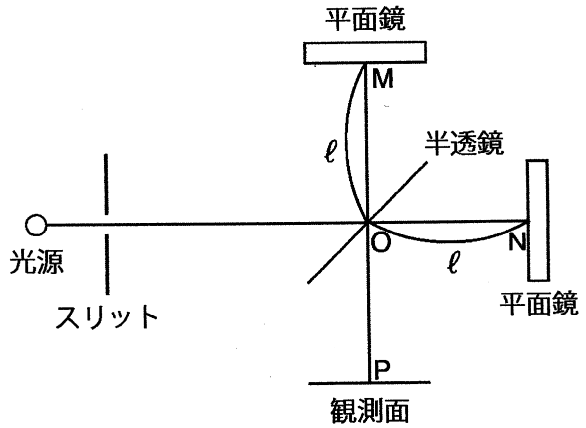
(1) 静電容量を求めなさい。

(2) 導体板の両端の間隔が $d+\delta$ と $d-\delta$ （$d \gg \delta$）になるように一方の導体板を傾けた。このときの静電容量を求めなさい。

(3) (2) の状態で、2枚の導体板を電位差 V の電池に接続した。このとき、導体板の間に蓄えられる静電エネルギーを求めなさい。

(4) (3) の状態で、導体板をさらに傾けるための外力を求めなさい。

2. 光の速度が地球の運動方向と関連するかを調べたマイケルソンとモーリーの実験について考える。図に示すマイケルソン干渉計を ON が地球の自転方向に一致するように設置した。地球の自転と共に干渉計全体は ON の方向に速さ v で動くが、光は静止したエーテルを媒質として伝播すると仮定する。光の速度を c、ON および OM の距離を共に ℓ とする。この実験について、以下の問いに答えなさい。



(1) 経路 ONOP と経路 OMOP をたどる光の時間差 Δt を求めなさい。

(2) 光の波長を λ として、(1) の二つの経路をたどる光の位相差 $\Delta\phi$ を求めなさい。

(3) (2) の位相差を観測する方法を説明しなさい。

(4) マイケルソンとモーリーの実験では予想された光の位相差は検出されなかった。この実験結果より推論される内容を説明しなさい。

（次ページにつづく）

3. $z=0$ に置かれた開口に垂直に平行光（波数 k）を入射させる。開口面上での光学的変位を $f(x,y)$ で表すとき、開口より距離 R だけ離れたスクリーン上の点 $\mathrm{P}(x_0,y_0,R)$ での光学的変位は次式で表される。

$$u_{\mathrm{P}}=\iint f(x,y)e^{ikr}dxdy, \quad r=\sqrt{R^2+(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}.$$

この光学系について、以下の問いに答えなさい。

(1) 光学的変位に対応する具体的な物理変量を説明しなさい。

(2) 開口とスクリーンの距離 R が十分大きいとき、次の関係式が得られることを示しなさい。

$$u_{\mathrm{P}}\propto\iint f(x,y)e^{-ik(\ell x+my)}dxdy.$$

ただし、$\ell=x_0/R_0,\ \ m=y_0/R_0,\ \ R_0=\sqrt{R^2+x_0^2+y_0^2}.$

(3) (2) より得られる u_{P} の数学的な解釈と、変数 ℓ,m により u_{P} が決まることから導かれる物理現象を説明しなさい。

(4) $f(x,y)=\begin{cases}1, & x^2+y^2\leqq\rho\\ 0, & x^2+y^2>\rho\end{cases}$ のとき、スクリーン上で観測される光強度パターンの概形を示しなさい。