令和６年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

令和５年７月29日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて７枚、解答用紙は６枚である。さらに選択科目確認票１枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の４科目よりなる。このうち、２科目を選択して解答すること。３科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 各科目は３つの大問からなる。解答は大問ごとに１枚（科目ごとに３枚）の解答用紙に記入すること。

   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入すること。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. N 個の数値データの組 $(X[1], Y[1]), (X[2], Y[2]), \ldots, (X[N], Y[N])$ を配列 X, Y に格納する。L を N 以下の正整数とする。以下のアルゴリズムを考える。

```
k ← 1
for i ← 1 to N − 1 do
    for j ← i + 1 to N do
        d[k] ← (X[i] − X[j]) * (X[i] − X[j]) + (Y[i] − Y[j]) * (Y[i] − Y[j])
        k ← k + 1
    end for
end for
M ← k − 1
for i ← 1 to M − 1 do
    for j ← 2 to M − i + 1 do
        if d[j] < d[j − 1] then
            swap(d[j], d[j − 1])
        end if
    end for
end for
print(d[L])
```

ただし、swap$(d[j], d[j-1])$ は、$d[j]$ と $d[j-1]$ の値を交換する操作を意味する。以下の問いに答えなさい。

(1) $N = 5$, $L = 2$, $X[1] = 2$, $X[2] = 2$, $X[3] = 3$, $X[4] = 7$, $X[5] = 9$, $Y[1] = 3$, $Y[2] = 9$, $Y[3] = 1$, $Y[4] = 5$, $Y[5] = 7$ に対して、アルゴリズムの実行結果を答えなさい。

(2) アルゴリズム中のif文の条件式が評価される回数を N を用いて表しなさい。

(3) このアルゴリズムを改良する方法について考えを述べなさい。

2. 以下の問いに答えなさい。

(1) データ x に対してハッシュ値 $h(x) \in \{1, 2, \ldots, M\}$ を返すハッシュ関数 h を用いて、チェイン法によるハッシュテーブルを構成する。すなわち、M 個の片方向リスト $L(1), L(2), \ldots, L(M)$ を用意し、データ x を $L(h(x))$ に格納する。このハッシュテーブルに N 個の相異なるデータ $x_1, x_2, \ldots, x_N$ が格納されているとき、格納済みのデータ x_k を探索するためにかかる計算時間について説明しなさい。ただし、N 個のデータが M 個のリストに一様に格納されていると仮定してよい。

(2) データ数 N に対して、M を大きく取ることのメリットおよびデメリットについて考えを述べなさい。

（次ページにつづく）

3. 頂点数 N の有向グラフ G において、すべての頂点の出次数が 1 であるとする。G の頂点集合を V で表し、頂点 $i \in V$ を始点とする唯一の有向辺の終点を $f(i) \in V$ で表す。なお、G は始点と終点が一致する有向辺（ループ）を持つことがあるとする。G の各頂点に置かれたコインを以下のルールに従って動かすことを考える。

- 時刻 0 にはすべての頂点に 1 枚ずつコインが置かれている。
- 時刻 $t-1$ に頂点 i に置かれていたすべてのコインは、時刻 t に頂点 $f(i)$ に置かれている。

時刻 t に頂点 i に置かれているコインの総数を $n_i(t)$ で表す。以下の問いに答えなさい。

(1) 次の条件をみたす $T \geqq 0$ および $P > 0$ が存在することを示しなさい。
条件「すべての $t \geqq T$ および $i \in V$ に対して $n_i(t) = n_i(t+P)$ となる。」

(2) G に頂点 i を通る閉路が存在しないことは、$n_i(T_i) = n_i(T_i+1) = \cdots = 0$ となる $T_i \geqq 0$ が存在することと同値であることを示しなさい。

(3) 頂点数 N のグラフのうち、(1) を満たす最小の T が最も大きくなるのはどのような場合か。

(4) 頂点数 $N = 9$ のグラフのうち、(1) を満たす最小の P が最も大きくなるのはどのような場合か。

[数理基礎]

1. 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}x^T Q x - x^T b$ とする。このとき、$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ を初期値とした漸化式

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k g^{(k)}, \quad g^{(k)} = Qx^{(k)} - b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

を考える。ただし、$\alpha_k \in \mathbb{R}$、$x, b \in \mathbb{R}^n$、Q は n 次の対称な正定値行列とする。また、$\bullet^T$ は転置を表す。

(1) Q の最大固有値を $\lambda_{\max}$、最小固有値を $\lambda_{\min}$ とするとき、任意の $x \neq 0$ に対して

$$\lambda_{\min} \leqq \frac{x^T Q x}{x^T x} \leqq \lambda_{\max}$$

$$\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \leqq \frac{(x^T x)^2}{(x^T Q x)(x^T Q^{-1} x)} \leqq \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) $g^{(k)} \neq 0$ のとき、$f(x^{(k)} - \alpha g^{(k)})$ が最小となる α を α_k とする。このとき、

$$\alpha_k = \frac{{g^{(k)}}^T g^{(k)}}{{g^{(k)}}^T Q g^{(k)}}$$

となることを示しなさい。

(3) $f(x)$ が最小となる x を x^* とおき、関数 $Z(x) = \dfrac{1}{2}(x - x^*)^T Q (x - x^*)$ を考える。このとき $x^{(k)} \neq x^*$ とする。(2) のように α_k を与え、

$$\gamma_k = \frac{({g^{(k)}}^T g^{(k)})^2}{({g^{(k)}}^T Q g^{(k)})({g^{(k)}}^T Q^{-1} g^{(k)})}$$

としたとき、

$$Z(x^{(k+1)}) = (1 - \gamma_k) Z(x^{(k)})$$

となることを示しなさい。

（次ページにつづく）

2. 次の線形計画問題を考える。

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geqq 1 \\
& x_k \geqq 0, \quad k = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
$$

以下の問いに答えなさい。

(1) 最適解が存在するための必要十分条件を求めなさい。

(2) 最適解が存在するとき、最適解および最適値を求めなさい。

3. 確率変数 X, Y は平均 μ、分散 σ^2 をもち、平均の周りに対称な分布に従い、X と Y の相関係数が $\rho \neq 0$ であるとする。

(1) X^2 の期待値 $E(X^2)$ を求めなさい。

(2) X^3 の期待値 $E(X^3)$ を求めなさい。

(3) X と $X^2 + aY$ が無相関となるときの a の値を求めなさい。

[数学解析]

1. 複素関数 $f(z)$ が複素平面全体で微分可能であるとき、$|f(z)|$ が定数ならば、$f(z)$ も定数であることを示しなさい。

2. 以下の問いに答えなさい。

(1) 複素関数 $g(z) = \dfrac{2e^{-2\pi iuz}}{e^{\pi z} + e^{-\pi z}}$ について、C_R を反時計回りの積分路とする複素積分

$$I_{C_R} = \int_{C_R} g(z)\, dz$$

を計算しなさい。ただし、u は実定数であり、C_R は $R > 0$ として線分 $[-R, R]$, $[R, R+2i]$, $[R+2i, -R+2i]$, $[-R+2i, -R]$ によりできる長方形である。

(2) 前問の $g(z)$ について、x を実数とするとき、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = \frac{2}{e^{\pi u} + e^{-\pi u}}$$

が成り立つことを示しなさい。

(3) 実関数 $h(x) = \dfrac{2}{e^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}x}}$ のフーリエ変換

$$\widehat{h}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-iwt}\, dt, \qquad -\infty < w < \infty$$

について、$\widehat{h}(w) = h(w)$ が成り立つことを示しなさい。

3. 微分方程式

$$pq\frac{d^2x}{dt^2} + (p+q)\frac{dx}{dt} + x = w(t)$$

とその解 $x(t)$ について考える。ただし、$p > 0,\ q > 0$ であり、$w(t)$ は連続な関数である。以下の問いに答えなさい。

(1) $w(t) = 1 - e^{-t},\ pq = 1$ であるときの一般解を求めなさい。

(2) $y = p\dfrac{dx}{dt} + x$ とおき、x の微分方程式を y の微分方程式に書き換えなさい。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} w(t)$ が存在すれば $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t)$ も存在することを示しなさい。

[情報物理]

1. 以下の問いに答えなさい。

(1) 真空中に置かれた半径 a の中空の薄い球殻に電荷 Q を一様に分布させた。球殻の内部と外部での電界を求めなさい。真空誘電率は ε_0 とする。

(2) 球殻の内部を誘電率 ε の誘電体で満たし、電荷 Q で帯電させた。球殻の内部と外部での電界を求めなさい。

(3) 球殻の内部の誘電体をその中心より半径 b の球形にくり抜いて中空にした。このときの静電容量を求めなさい。

2. 次式で表される継続時間 τ の正弦波 $f(t)$ について、以下の問いに答えなさい。

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \exp(-i\omega_0 t) & |t| \leqq \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

(1) 角振動数を ω とするとき、スペクトル分布 $F(\omega)$ を求めなさい。

(2) パワースペクトル $|F(\omega)|^2$ の概形を図示しなさい。

(3) 上式により光波をモデル化したとき、τ が可干渉時間に相当することを説明しなさい。

(4) スペクトル幅 $\Delta\omega$ と可干渉時間 τ_c の間に $\Delta\omega \approx \dfrac{2\pi}{\tau_c}$ なる関係が成り立つことを説明しなさい。

3. 幅 a のスリットが等間隔 d（$d > a$）で並んでいる。このスリット列に波長 λ の光を垂直入射させる。この実験系について以下の問いに答えなさい。

(1) スリット列を通過した後、特定の偏向角（入射光の進行方向に対する角度）θ に進む回折光の強度が大きくなる。偏向角 θ が満たす条件を示しなさい。

(2) (1) のような強度の大きい回折光は複数の偏向角に対して得られる。これを単一偏向角の回折光だけが得られるようにするにはどうすればよいか。原理とともに説明しなさい。

(3) このスリット列全体をスリット面内でスリットに直交する方向に $d/2$ だけ平行移動し、同様に光を入射させた。得られた回折光に生じる変化について、理由を付して説明しなさい。

(4) このスリット列に、非常に短い継続時間のパルス光を入射させる。このとき観察される現象について、理由を付して説明しなさい。