令和７年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

令和６年７月27日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて７枚、解答用紙は６枚である。さらに選択科目確認票１枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の４科目よりなる。このうち、２科目を選択して解答すること。３科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 各科目は３つの大問からなる。解答は大問ごとに１枚（科目ごとに３枚）の解答用紙に記入すること。

   解答用紙のすべてに、選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入すること。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. 有限個の整数の集合 A と整数 p に対して、再帰的に定義されたアルゴリズム

$\texttt{Select}(p, A)$

1. $|A| < 100$ のとき、A の要素をソートし、小さい方から p 番目の値を返す。
2. $|A| \geqq 100$ のとき、
   - 2.1 A を要素数が 5 のグループに分ける。端数が出た場合、それらはどのグループにも入れない。各グループより小さい方から 3 番目の要素を取り出し、それらを集めた集合を B とおく。
   - 2.2 $m \leftarrow \texttt{Select}(\left\lceil \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{|A|}{5} \right\rfloor \right\rceil, B)$
   - 2.3 A を m より小さい要素の集合 A_L と m より大きい要素の集合 A_G に分ける。
   - 2.4 $p < |A_L| + 1$ のとき、$y \leftarrow \texttt{Select}(p, A_L)$
$p = |A_L| + 1$ のとき、$y \leftarrow m$
$p > |A_L| + 1$ のとき、$y \leftarrow \texttt{Select}(p - |A_L| - 1, A_G)$
   - 2.5 y を返す。

を考える。ただし、A の要素は相異なる値をもち、$1 \leqq p \leqq |A|$ であるとする。ここで、$|S|$ は集合 S の要素数、$\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数、$\lceil x \rceil$ は x 以上の最小の整数を表す。以下の問いに答えなさい。

(1) $\texttt{Select}(p, A)$ を実行すれば、$|A| \geqq 100$ であったとしても、A の要素の小さい方から p 番目の値が得られることを説明しなさい。

(2) ソートの手法を三つ挙げ、それらの時間計算量のオーダを述べなさい。

(3) $n = |A|$ とするとき、アルゴリズム中で用いるソートの手法にかかわらず、$\texttt{Select}(p, A)$ の時間計算量が $O(n)$ であることを示しなさい。

（次ページにつづく）

2. 有向グラフ G を考える。任意の2頂点間を結ぶ有向道が存在するとき、G は強連結であるという。任意の2頂点間を結ぶ、辺の向きを考慮しない道が存在するとき、G は弱連結であるという。各頂点について、出て行く辺の数を出次数、入って来る辺の数を入次数という。以下の問いに答えなさい。

(1) 有向グラフ G が弱連結であり、どの頂点についても入次数と出次数が 1 以上であるとき、G は有向閉路をもつか。

(2) 有向グラフ G が弱連結であり、どの頂点についても入次数と出次数が等しいとき、G はすべての辺を一度だけ通る有向閉路をもつか。

(3) 有向グラフ G が弱連結であり、どの頂点についても入次数と出次数が等しいとき、G は強連結か。

3. 実数 x を与えると実数を返すあるプログラムについて、修正前のもの

```
OldFunc(x)
      a ← x/2 ;
L1:   b ← (x/a + a)/2 ;
      c ← b − a ;
      if  c < 0  then  c ← −c ;
      if  c < TOL  then  return b ;
      a ← b ;
      goto L1 ;
```

および修正後のもの

```
NewFunc(x)
      if  x < 0  then  return UNDEFINED ;
      if  x = 0  then  return x ;
      b ← x/2 ;
      while  abs((x/b − b)/2) ≧ TOL  do  b ← (x/b + b)/2 ;
      return b ;
```

を考える。ただし、UNDEFINED は未定義であることを意味する定数、TOL は収束判定に用いる小さな正の定数であり、abs(z) は実数 z の絶対値を返す関数である。以下の問いに答えなさい。

(1) 使われているアルゴリズムの動作原理を説明することにより、これらのプログラムが何を求めようとするものかを示しなさい。

(2) NewFunc で修正されている OldFunc の欠点を、箇条書きにまとめなさい。

(3) NewFunc における while 行の収束判定条件は、必ずしも適切ではない。その理由と修正案を示しなさい。

[数理基礎]

1. 変数 $x_k \geqq 0$ $(k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 10)$ について、条件

$$\sum_{k=-10}^{10} (10-k)x_k = 20, \qquad \sum_{k=-10}^{10} (10+k)x_k = 40$$

の下で、$\displaystyle\sum_{k=-10}^{10} |k|x_k$ を最小化する問題を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) 線形計画問題として定式化しなさい。

(2) (1) の線形計画問題の双対問題を答えなさい。

(3) (1) の線形計画問題について実行可能な基底解の個数を答えなさい。

(4) (3) の実行可能な基底解のうち最適なものの個数を答えなさい。

2. 確率変数 X と Y が独立に標準正規分布に従うとき、確率変数 $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ について、以下を求めなさい。

(1) 累積分布関数 $F(r) = \Pr[R < r]$

(2) 期待値 $\mathrm{E}[R]$

(3) 分散 $\mathrm{V}[R]$

3. 確率密度関数 $f(x) = Ce^{-|x-\mu|}$ をもつ確率分布について、以下の問いに答えなさい。ただし、C は正規化のための定数、$\mu \in \mathbb{R}$ は分布のパラメータである。

(1) C を求めなさい。

(2) この分布から独立に n 個の観測値 $x_1, \ldots, x_n$ が得られているとする。n が奇数のとき、μ の最尤推定量 $\hat{\mu}$ を求めなさい。

(3) (2) の $\hat{\mu}$ は不偏推定量であるか答えなさい。

(4) n が偶数のとき、μ の最尤推定量とその不偏性について、考えを述べなさい。

[数学解析]

1. 複素関数

$$f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $|z| < 1$ において、関数 $f(z)$ を、原点を中心とするべき級数に展開しなさい。

(2) 関数 $f(z)$ の孤立特異点をすべて求め、それぞれの留数を計算しなさい。

(3) 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

を計算しなさい。

2. $t > 0$ として、微分方程式

$$t^2\ddot{x}(t) - 2t\dot{x}(t) + 2x(t) = 4t^3 \log t \qquad (*)$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) 変数変換 $s = \log t$ によって、$x(s)$ に関する微分方程式を求めなさい。

(2) 微分方程式 $(*)$ を解きなさい。

3. 2つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ があるとき

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

を $f(t)$ と $g(t)$ の合成積という。以下の問いに答えなさい。

(1) 合成積のラプラス変換はそれぞれの関数のラプラス変換の積であることを説明しなさい。

(2) $x(0) = 0$ のもとで、方程式

$$\dot{x}(t) - 3x(t) + 8\int_0^t x(\tau)\sin(t-\tau)d\tau = 10\cos t$$

を満たす関数 $x(t)$ を求めなさい。

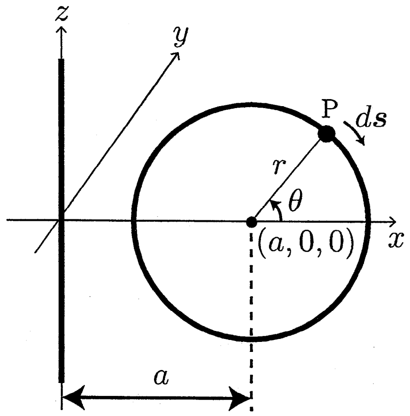
[情報物理]

1. 図のように、$y=0$の平面内に、z軸に沿って無限に長く細い直線状導線と半径r、中心座標$(a,0,0)$, $a>r$の細い円状導線がある。系の透磁率をμとする。以下の問いに答えなさい。なお、$0<\alpha<1$のとき、$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{1+\alpha\cos\phi}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$を用いてよい。

(1) 直線状導線に$+z$方向の定常電流I_1を流したときに生じる磁束密度分布を求めなさい。

(2) (1)の状況に加えて、円状導線にy軸の負の方向からみて時計回りの定常電流I_2を流したとき、円状導線上の点$\mathrm{P}(a+r\cos\theta,\,0,\,r\sin\theta)$, $0\leqq\theta<2\pi$における電流素片I_2dsに作用するアンペールの力を求めなさい。

(3) (2)のとき、円状導線が受ける力を求めなさい。



2. 二つの十分小さいピンホール（間隔d）を持つ平面の遮光板に対して垂直に、波長λ、単一振幅平面波のコヒーレント光をあて、十分な距離lだけ離れたスクリーン（遮光板に平行）で光強度分布を観察する。この系はフラウンホーファー回折で記述でき、スクリーン上での光学的変位$u_P(x,y)$と遮光板直後の光学的変位$f(\xi,\eta)$の関係は

$$u_P(x,y)\propto\iint f(\xi,\eta)\exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda l}(x\xi+y\eta)\right]d\xi d\eta$$

と書ける。iは虚数単位である。以下の問いに答えなさい。

(1) スクリーンで得られる光強度分布を求め、その概略を図示しなさい。

(2) 一方のピンホールに入射する光の位相をπだけ遅らせた。スクリーンで得られる光強度分布はどのように変化するか、理由を含めて説明しなさい。

(3) (2)のように光の位相を遅らせる方法を一つ挙げなさい。

(4) 最初の系において一方のピンホールに入射する光の強度を低くした。スクリーンで得られる光強度分布はどのように変化するか、理由を含めて説明しなさい。

（次ページにつづく）

3. x, y 方向の光学的変位 E_x, E_y がそれぞれ

$$E_x = A_1 \cos(kz - \omega t)$$
$$E_y = A_2 \cos(kz - \omega t + \pi)$$

で表される、z 方向に伝搬する光波 L を考える。k は伝搬定数、ω は角周波数、t は時間、A_1, A_2 は正の定数である。以下の問いに答えなさい。

(1) 光波 L の偏光状態について、$z = 0$ における光学的変位の時間変化を xy 平面上に図示して説明しなさい。

(2) 光波 L を 2 分の 1 波長板に透過させたとき、偏光状態はどのように変化するか、説明しなさい。

(3) 光波 L と強度が等しい円偏光の光波 L_c について、光学的変位の x, y 成分の式を示しなさい。

(4) 光波 L、光波 L_c、および光波 L と強度が等しいランダム偏光の光波 L_r の三つがあるとして、これらを識別するにはどうすればよいか、説明しなさい。