令和８年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

令和７年８月３日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて７枚、解答用紙は６枚である。さらに選択科目確認票１枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の４科目よりなる。このうち、２科目を選択して解答すること。３科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 各科目は３つの大問からなる。解答は大問ごとに１枚（科目ごとに３枚）の解答用紙に記入すること。

   解答用紙のすべてに、選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入すること。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. 非負の整数 n に対して、以下の3つのアルゴリズムを考える。以下の問いに答えなさい。

```
FUNC1(n)
if n = 0 then
  return 0
elseif n = 1 then
  return 1
else
  return FUNC1(n − 1) + FUNC1(n − 2)
```

```
FUNC2(n)
if n = 0 then
  return 0
elseif n = 1 then
  return 1
else
  x[0] ← 0
  x[1] ← 1
  for i ← 2 to n
    x[i] ← x[i − 1] + x[i − 2]
  return x[n]
```

```
FUNC3(n)
if n = 0 then
  return 0
elseif n = 1 then
  return 1
else
  x ← 0
  y ← 1
  for i ← 2 to n
    z ← x
    x ← y
    y ← y + z
  return y
```

(1) $n = 5$ に対する出力を求めなさい。

(2) 3つのアルゴリズムについて、メモリ使用量、時間計算量の観点からメリットやデメリットを説明するとともに、アルゴリズムの特徴を示しなさい。

(次ページにつづく)

2. 頂点数がn、枝数がmである単純なグラフを考える。以下の問いに答えなさい。

(1) 枝数mが$(n-1)(n-2)/2$より大きければ、グラフは連結であることを示しなさい。

(2) 連結な平面グラフでは、面の数は$m-n+2$であることを示しなさい。

(3) 連結な平面グラフでは、$m=O(n)$であることを示しなさい。

3. 2以上の整数nに対して、n個の実数$x_1, x_2, \ldots, x_n$が与えられているとする。以下は最大値を求めるアルゴリズムである。

$y \leftarrow \max(x_1, x_2)$
for $i \leftarrow 3$ **to** n
    if $y < x_i$ **then** $y \leftarrow x_i$
return y

これにならって、以下の値を求める$O(n)$時間のアルゴリズムを示しなさい。

(1) 降順に並べたときの2番目の値

(2) 2つの値の差の最大値

[数理基礎]

1. n を 2 以上の整数とする。決定変数 $x_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n,\quad j = 1, 2, \ldots, n)$ に関する最適化問題

$$\text{最小化} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |i-j| x_{ij}$$

$$\text{条件} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = p_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = q_j, \quad x_{ij} \geqq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

を考える。ただし、$p_i \in \mathbb{R}$, $q_j \in \mathbb{R}$ は定数である。以下の問いに答えなさい。

(1) この問題の双対問題を示しなさい。

(2) $p_1 = 2$, $p_2 = p_3 = \cdots = p_n = 1$, $q_1 = q_2 = \cdots = q_{n-1} = 1$, $q_n = 2$ とするとき、この問題の最適値を求めなさい。

2. n を正の整数とする。$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は対称行列であり、正定値であるとする。決定変数 $x \in \mathbb{R}^n$ に関する最適化問題

$$\text{最小化} \quad x^T Q x \qquad\qquad \text{条件} \quad x^T Q^{-1} x = 1$$

を考える。ただし、$\bullet^T$ は転置を表す。以下の問いに答えなさい。

(1) この問題に対する Karush–Kuhn–Tucker 条件を示しなさい。

(2) この問題の最適値を Q の固有値で表しなさい。

3. n を正の整数とする。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立で、平均 μ、分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数の列であるとする。確率

$$p(n) = \Pr\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \right| \geqq \sigma \right)$$

の上界について考える。以下の問いに答えなさい。

(1) 任意の $\alpha > 0$ について

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \leqq \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha^2/2}$$

が成り立つことを示しなさい。

(2) 前問の不等式を利用して、任意の正の整数 n に対して $p(n) \leqq b(n) < 1/n$ を満たす $b(n)$ を求めなさい。

[数学解析]

1. nを正の整数とする。$I_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \dfrac{dz}{(1-z-z^2)z^n}$が正の整数であることを示しなさい。

2. 以下の微分方程式について、初期条件 $x(0) = x_0$ を満たす解をそれぞれ求めなさい。ただし、$\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数を表す。

(1) $\dot{x} = -x(x-1)$

(2) $\dot{x} = -\left(x - \lfloor x \rfloor\right)\left(x - \lfloor x \rfloor - 1\right)$

3. 次の条件を満たす x の多項式 $P(x)$ を求めなさい。

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx, \qquad -\pi < x < \pi.$$

[情報物理]

1. 真空中（誘電率 ε_0）に、接地された無限に広い導体平板があり、その表面から距離 d の位置 P に点電荷 q を置いた。P から導体表面へ下ろした垂線の足を原点 O とし、O から P の方向に x 軸、導体表面内に y 軸と z 軸をとった直交座標系を用いる。

(1) 鏡像法に基づき考えるとき、この系から導体平板を取り除いた上で、新たに置くべき点電荷の電荷量と位置を答えなさい。

(2) 位置 (x, y, z)（ただし、$x > 0$）における電位、および、電場を求めなさい。

(3) 導体表面 $(0, y, z)$ に誘導される電荷の面密度を求めなさい。

(4) 点電荷 q が導体から受けるクーロン力の大きさを求めなさい。

2. 平面の原画像から距離 L だけ離れた面 S にピンホールを置き、そこからさらに距離 $2L$ だけ離れた面で像を観察した。

(1) 原画像と観察される像の関係について説明しなさい。また、ピンホールの直径を小さくしていくときの像の変化について述べなさい。

(2) この系とレンズによる結像系を比較したときの特性の違いについて述べなさい。

(3) 面 S において、ピンホールから a だけ離れた位置に2つ目のピンホールを設けた。このときに観察される像について説明しなさい。幾何光学で考えて良い。

(4) 面 S において、ピンホールの代わりに単一の矩形スリットを置き、そこから観察面方向に距離 L だけ離れた面にも単一の矩形スリットを置いた。これら2つのスリットの長辺の方向は直交させた。このときに観察される像について説明し、同様の像をレンズを用いて得るための光学系を示しなさい。幾何光学で考え、収差は無視して良い。

（次ページにつづく）

3. 図に示すように、振幅が空間的に一様な平面波の光（波長 λ）が仮想平面 S に垂直入射している。平面 S において、点 O を中心とする半径 r_1 の円盤、および、半径 r_{n-1} と r_n $(n = 2, 3, \ldots, N)$ の円を境界とする輪帯を考える。点 P は点 O における平面 S の垂線上にあり、$\overline{OP} = f$ とする。半径 r_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ の円周上の点を Q_n としたとき、

$$\overline{Q_nP} - \overline{OP} = \frac{n\lambda}{2}$$

が成り立つとする。$f \gg r_n$ のとき、以下の問いに答えなさい。

(1) r_n を f, λ, n で表しなさい。

(2) 半径が r_{2k-1} と r_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$ の円を境界とするすべての輪帯に遮光板を置いたところ、点 P での光強度が飛躍的に増加した。この理由について説明しなさい。

(3) (2) の状態で、波長のみを 2λ に変えたときどうなるか、説明しなさい。

(4) (2) の現象はレンズの作用が得られることを意味している。ガラスなどで作製される屈折に基づくレンズとの特性の違いを述べなさい。

(5) (2) のように円盤や輪帯ごとに光を操作することで、(2) よりも点 P での光強度を上げるための方策について述べなさい。