大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成１７年度大学院前期課程入試問題

(数学)

【注意事項】

- 問題数は5 題である。

  解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。
  解答用紙は裏面も使用してよい。
  解答用紙は未使用や書き損じも含め、すべて提出すること。

- 問題紙は表紙を入れて3 枚である。問題紙は持ち帰ってよい。

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること.

1. $[0,\infty)$ 上の関数 $f(x)$ が連続な導関数 $f'(x)$ をもち, さらに条件

$$\int_0^\infty |f(x)| + |f'(x)|\,dx < \infty$$

を満たすとき, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在すること, およびその値が 0 であることを示せ.

2. $f(x,y)$ を 2 回連続的微分可能な関数とする.
$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおくとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

であることを示せ.

3. t を実数とする. $t=0$, $t>0$, $t<0$ の 3 つの場合に分けて, 次の定積分を計算せよ. ただし, $i=\sqrt{-1}$ である.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{itx}}{x^2+1}\,dx$$

4. (i) 次の行列式を計算せよ.

$$D(a_1,a_2,\ldots,a_n) = \begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & & & a_{n-1}+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & a_n+1 \end{vmatrix}$$

(ii) 集合

$$\left\{ \frac{D(1,2,\ldots,n)}{n!} \,\middle|\, n = 1,2,3,\ldots \right\}$$

は有界か. 証明とともに答えよ.

5. A を成分が実数であるような $m \times n$ 行列とする. A の行ランクとは A の m 個の行ベクトルが張る $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間の次元のことであり, A の列ランクとは A の n 個の列ベクトルが張る $\mathbf{R}^m$ の部分ベクトル空間の次元のことである.

以下の問いに答えよ.

(i) 行列 A に行基本変形を施して行列 B が得られたとする. このとき

$$A \text{ の行ランク} = B \text{ の行ランク}, \quad A \text{ の列ランク} = B \text{ の列ランク}$$

であることを証明せよ.

(ii) A の行ランク $=$ A の列ランク　であることを証明せよ.

（註）行列の行基本変形とは以下の３種類の操作を繰り返し行うことである.

(a) ある行に実数 $c \neq 0$ をかける.

(b) ２つの行を入れ換える.

(c) ある行に別の行の実数倍を加える.