大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成１８年度大学院前期課程入試問題

(数学)

【注意事項】

● 問題数は5 題である。

解答は問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。
解答用紙は裏面も使用してよい。
解答用紙は未使用や書き損じも含め、すべて提出すること。

● 問題紙は表紙を入れて3 枚である。問題紙は持ち帰ってよい。

解答は問題ごとに別々の解答用紙に記入すること．

1.　実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が漸化式

$$a_{n+1} = -1 + (n+1)\,a_n, \quad n \geqq 1$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(i) $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$ とおいたとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を a_1 を用いて表せ．

(ii) $\{a_n\}$ の収束・発散を判定し，収束する場合はその極限値も求めよ．

2.　$\mathbf{R^2}$ 上の関数

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}, \quad (x,y) \in \mathbf{R^2}$$

が極値をとる点 (a,b) をすべて求め，その点での値が極大か極小かを判定せよ．

3.　次の定積分を留数の考え方を用いて計算せよ．ただし, $i = \sqrt{-1}$ である．

(i) $$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\, d\theta$$

(ii) $$\int_0^{2\pi} e^{2e^{i\theta} - i\theta}\, d\theta$$

4.　行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

としたとき，次に答えよ.

(i) A の固有値を求めよ.

(ii) 不等式

$$ {}^t\boldsymbol{x}\,(a\,E - A)\,\boldsymbol{x} \geqq 0, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

がすべての $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3$ に対して成り立つような実数 a の範囲を求めよ.
ただし，E は単位行列, ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置である.

(iii) a が (ii) で求めた範囲にあるとき，

$$ {}^t\boldsymbol{x}\,(a\,E - A)\,\boldsymbol{x} = 0$$

が成立する $\boldsymbol{x}$ をすべて求めよ.

5.　n 次の正方行列

$$\begin{pmatrix} 1+x & 1 & & & \Large 0 \\ 1 & 1+x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1+x & 1 \\ \Large 0 & & & 1 & 1+x \end{pmatrix}$$

の行列式を $f_n(x)$ としたとき，次に答えよ.

(i) $n \geqq 3$ のとき，$f_n(x)$ を $f_{n-1}(x)$ と $f_{n-2}(x)$ を用いて表せ.

(ii) $f_n(1)$ を n を用いて表せ.

(iii) $x > 1$ ならば，$f_n(x) > n + 1$ であることを示せ.