

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成19年度大学院前期課程入試問題

(数学)

【注意事項】

- 問題数は5題である。
解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。
解答用紙は裏面も使用してよい。
解答用紙は未使用や書き損じも含め、すべて提出すること。
- 問題紙は表紙を入れて3枚である。問題紙は持ち帰ってよい。

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。

1. 関数 $f(x)$ を $x = a$ の近傍で2回微分可能とする。このとき、

$$\lim_{\substack{h \rightarrow +0 \\ k \rightarrow +0}} \frac{f(a+h) - f(a-k)}{h+k} = f'(a)$$

となることを示せ。また、 $x = a$ のみで1回微分可能のときも上の等式が成り立つことを示せ。

2. \mathbb{R} を実数の全体とする。楕円体 $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}$ の体積 V を求めよ。ただし、 $a > 0, b > 0, c > 0$ とする。

3. 留数の考え方をを用いて次の等式を示せ。

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

4. x_1, x_2, x_3, x_4 を実数とするとき、次の等式を示せ。ただし、左辺は行列式である。

$$\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_1x_2 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_1x_4 & x_2x_4 & x_3x_4 & 1+x_4^2 \end{vmatrix} = 1+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$$

5. 成分が実数である 3 次の正方行列 A で次の 3 つの条件をみたすものを考える。

(1) $\text{tr } A = 0$, (2) $\det A = 2$,

(3) 行列 A の固有方程式は複素数の範囲で重解をもつ。

このとき、以下の問いに答えよ。

(i) 行列 A の固有値を求めよ。

(ii) A の逆行列 A^{-1} を行列 A の多項式としてあらわせ。

(iii) 上の条件 (1), (2), (3) をみたす対角化可能でない行列 A , および対角化可能な行列 A の例をそれぞれ一つ書け。

$$\left(\begin{array}{l} n \text{ 次の正方行列 } A = (a_{ij}) \text{ に対し} \\ \det A = A \text{ の行列式} \\ \text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \\ \text{とする.} \end{array} \right)$$