大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成２０年度大学院前期課程入試問題

(数学)

【注意事項】

- 問題数は5 題である．
- 問題紙は表紙を入れて3 枚である．
  解答用紙は5 枚である．裏面も使用してよい．
  解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること．
  解答用紙が不足する場合は追加を申し出ること．
  すべての 解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
  解答用紙は未使用や書き損じも含め，すべて提出すること．
- 試験終了後，問題紙は持ち帰ってよい．

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること．

1. 原点 $(0,0,0)$ を中心とする半径 $a\ (>0)$ の球と円柱 $x^2+y^2-ax=0$ で囲まれる立体の体積を求めよ．

2. 複素数を成分とする n 次の正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) 行列 A の固有多項式 $f_A(\lambda)$ を求めよ．

(2) 固有方程式 $f_A(\lambda)=0$ の n 個の複素数解 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ が相異なるとする．このとき $P^{-1}AP$ が対角行列となる正則行列 P の一つを $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ を使って表せ．

3. 複素平面の領域 $D=\{z\ :\ |z|<1\}$ で $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が正則であり，任意の $z\in D$ で $|f(z)|<1$ であると仮定する．このとき，不等式

$$|a_n|\leqq 1,\quad n=0,1,2,\cdots$$

を示せ．

4. 実数を成分とする 2 次の正方行列全体の成すベクトル空間を V とする．

2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を一つ固定し，写像 $\varphi_A : V \to V$ を

$$\varphi_A(X) = AX - XA, \qquad X \in V$$

で定義する．このとき φ_A は線形写像であることを示し，V の基底

$$\left\{ T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

に関する φ_A の表現行列を求めよ．

5. 閉区間 $[a,\ b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ が開区間 $(a,\ b)$ で 2 回微分可能であり，常に $f''(x) > 0$ であるとする．

(1) 閉区間 $[a,\ b]$ に属する任意の 3 点 $x_1 < x_2 < x_3$ について

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

が成立することを示せ．

(2) さらに $f(a) > 0,\ f(b) < 0$ であるならば，方程式 $f(x) = 0$ は開区間 $(a,\ b)$ において唯一つの解を持つことを (1) を使って示せ．