大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成２２年度大学院前期課程入試問題

(数学)

【注意事項】

● 問題数は5 題である.

● 問題紙は表紙を入れて3 枚である.
解答用紙は5 枚である．裏面も使用してよい.
解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること.
解答用紙が不足する場合は追加を申し出ること.
すべての 解答用紙に受験番号と氏名を記入すること.
解答用紙は未使用や書き損じも含め，すべて提出すること.

● 試験終了後，問題紙は持ち帰ってよい.

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること．

1. i) 次の広義積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^2)^4}}dxdy,$$

$$D = \{\ (x,y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{3}x,\ x^2+y^2 \leq 8\ \}.$$

ii) 次の複素積分の値を求めよ．

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(2z-1)(3z-2)}dz$$

ただし，積分路は単位円 $|z|=1$ 上を反時計回りに１周するものとする．

2. 実数 a に対し行列 $A(a)$ を

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

で与える．このとき，$\mathbf{R}^5$ の部分空間

$$V(a) = \{\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^5 \mid A(a)\mathbf{x} = \mathbf{0}\ \}$$

の次元を求めよ．

3. 0 でない複素数 a, b, c に対し，数列 $\{z_n\}$ が次で与えられている．

$$z_1 = a, \qquad z_2 = b, \qquad z_n = c\,\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}} \quad (n = 3, 4, \ldots)$$

このとき，

i) z_7 を求めよ．

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$ を求めよ．

4. 関数 $f(x)$ は $\mathbf{R}$ 上 3 回微分可能とし，実数 a, b $(a < b)$ に対して次を満たすとする．

$$f(a) = f(b), \qquad f'(a) = f'(b) = 0$$

このとき，$f'''(x) = 0$ を満たす x が開区間 (a, b) 内に存在することを示せ．

5. 次のような n 次正方行列 $A(n, r)$ を考える．ただし，$0 < r < n$ とする．

$$A(n,r) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \quad \cdots \quad \cdots \quad 1}}^{r} \quad \overbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 0}}^{n-r} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \underbrace{\hphantom{1 \quad \cdots \quad 1}}_{r-1} \quad \underbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad 0}}_{n-r} \end{array}$$

すなわち，$A(n, r)$ の (i, j) 成分 a_{ij} が，

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (n + j - i \text{ を } n \text{ で割った余りが } r \text{ 未満のとき}) \\ 0 & (n + j - i \text{ を } n \text{ で割った余りが } r \text{ 以上のとき}) \end{cases}$$

で与えられているとする．このとき，

i) $A(n, r)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす列ベクトル $\mathbf{x}$ の成分 $x_1, \ldots, x_n$ について，

$$x_i = x_{i+r} \quad (i = 1, 2, \ldots, n - r)$$

が成り立つことを示せ．

ii) r と n が互いに素のとき，$A(n, r)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす列ベクトル $\mathbf{x}$ は零ベクトルに限ることを示せ．

iii) r と n の最大公約数 g が 2 以上のとき，$A(n, r)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を満たす零ベクトルでない列ベクトル $\mathbf{x}$ を一つ与えよ．