大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成２３年度大学院前期課程入試問題

(数学)

【注意事項】

- 問題数は5 題である.
- 問題紙は表紙を入れて3 枚である.
  解答用紙は5 枚である. 裏面も使用してよい.
  解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること.
  解答用紙が不足する場合は追加を申し出ること.
  すべての 解答用紙に受験番号と氏名を記入すること.
  解答用紙は未使用や書き損じも含め，すべて提出すること.
- 試験終了後，問題紙は持ち帰ってよい.

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること．

1. 次の積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(1+x^2-2xy+5y^2)^2}$

2. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

に対し，$\mathbb{R}^5$ の線形部分空間 V, W を

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}, \quad W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid B\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

で定める．

(1) V の次元を求めよ．

(2) $V \cap W$ の基底を1組求めよ．

(3) $V + W$ の次元を求めよ．

3. 領域 $D \subseteq \mathbb{C}$ を定義域にもつ $z = x + iy$ （x, y は実数）の正則関数 $f(z)$ を実数値微分可能関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ を用いて $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ と表す.

(1) 次の Cauchy-Riemann の微分方程式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(2) 定義域が $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で，$u(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ のとき，$v(x,y)$ を求めよ.

4. A を実数成分の n 次正方行列とする．いま，$A\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ をみたす任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ が成り立つとする．ただし，$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ のすべての成分が非負のとき $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ と書く.

(1) A は正則行列であることを示せ.

(2) A^{-1} のすべての成分が非負であることを示せ.

5. 100 万人に 1 人の割合で感染する病気がある．この病気を検査するために開発中の試薬があり，感染者に対して確率 $1 - 10^{-r}$ で陽性反応となり，確率 10^{-r} で陰性反応となる．また未感染者に対しては確率 10^{-r} で陽性反応となり，確率 $1 - 10^{-r}$ で陰性反応となる．ただし，r は自然数である.

(1) この試薬で陽性反応が出たにもかかわらず実際には病気に感染していない条件付確率を求めよ.

(2) この試薬で陽性反応が出たとき実際に病気に感染している確率が 0.9 を超えるような最小の自然数 r を求めよ.