大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成２４年度大学院前期課程入試問題

（数学）

【注意事項】

- 問題数は5 題である．
- 問題紙は表紙を入れて3 枚である．
  解答用紙は5 枚である．裏面も使用してよい．
  解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること．
  解答用紙が不足する場合は追加を申し出ること．
  すべての 解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
  解答用紙は未使用や書き損じも含め，すべて提出すること．
- 試験終了後，問題紙は持ち帰ってよい．

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること.

1. 次の積分の値を求めよ.

(1) $$\iint_D xy\log(x^2+y^2)\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1,\ x,y\geq 0\}$$

(2) $$\int_0^{\sqrt{\pi/2}}\left(\int_y^{\sqrt{\pi/2}}\cos(x^2)\,dx\right)dy$$

2. 未知数 x, y, z, w に対する次の連立方程式の実数解を求めよ.

$$\begin{cases} -x + 2y + z + xw = 0 \\ 2x + 2y + 2z + yw = 0 \\ x + 2y - z + zw = 0 \end{cases}$$

3. 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ 上で収束する冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ で定まる関数 $f(x)$ が, 微分方程式 $\dfrac{d^3y}{dx^3}=y$ の解ならば, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は周期 3 を持つこと, 即ち $a_{n+3}=a_n$ $(n\geq 0)$ であることを示せ.

(2) 逆に, 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が周期 3 を持つとき, 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ は全ての $x\in\mathbb{R}$ に対して収束することを示せ. さらに, この極限を $f(x)$ と書くとき, $f(x)$ は微分方程式 $\dfrac{d^3y}{dx^3}=y$ の解であることを示せ.

(3) 上記において, $a_n=\dfrac{n}{3}-\left[\dfrac{n}{3}\right]$ $(n\geq 0)$ のとき, $f(x)$ を三角関数・指数関数を用い求めよ. ここに, $[\alpha]$ は α を超えない最大の整数を表すとする.

4. 複素数を成分とする2次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

のトレースは，$\mathrm{tr}A = a + d$ と定義される．また2次の単位行列を I，零行列を O で表す．

(1) 複素数を成分とする2次正方行列 A が $\mathrm{tr}A = 0$ をみたせば，$\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $A^2 = \lambda I$ となることを示せ．

(2) 複素数を成分とする2次正方行列 A, B が共通の固有ベクトルを持つならば，$(AB - BA)^2 = O$ となることを示せ．

(3) 複素数を成分とする2次正方行列 A, B が共通の固有ベクトルを持たないならば，0でない $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して $(AB - BA)^2 = \lambda I$ となることを次の2つの場合に分けて示せ．

(a) A が対角化可能な場合

(b) A が対角化可能でない場合

5. 留数の計算を利用して，次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+1}\,dx$$

（ヒント　複素平面の上半平面上で，任意の $\epsilon \in (0,1)$ と $R \in (1,\infty)$ に対し，積分路 $\Gamma^+_{\epsilon,R} + \Gamma_R + \Gamma^-_{\epsilon,R} + \Gamma_\epsilon$ を考えよ．ここに，

$$\begin{array}{lll} \Gamma^+_{\epsilon,R} : & z = t & (\epsilon \le t \le R), \\ \Gamma_R : & z = Re^{it} & (0 \le t \le \pi), \\ \Gamma^-_{\epsilon,R} : & z = t & (-R \le t \le -\epsilon), \\ \Gamma_\epsilon : & z = \epsilon e^{i(\pi - t)} & (0 \le t \le \pi) \end{array}$$

である.)