

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

## 平成27年度大学院前期課程入試問題

(数学)

### 【注意事項】

- 問題数は5題である。
- 問題用紙は表紙を入れて3枚である。
- 解答用紙は5枚である。裏面も使用してよい。  
解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。  
解答用紙が不足する場合は追加を申し出ること。  
すべての解答用紙に受験番号と氏名と問題番号を記入すること。  
解答用紙は未使用や書き損じも含め、すべて提出すること。
- 試験終了後、問題用紙は持ち帰ってよい。

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること。

1. 次の積分の値を求めよ。

$$(1) \iiint_D z(2x^2 - y^2) dx dy dz, \quad D: 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2,$$

$$(2) \iint_D (x - y)^\alpha dx dy \quad (-1 < \alpha < 0), \quad D: 0 \leq y < x \leq 1.$$

2.  $n$  を 2 以上の自然数,  $x_1, \dots, x_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$  を  $2(n-1)$  個の数とする.  
このとき,  $1 \leq i, j \leq n$  に対し

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = 1), \\ b_{i-1} & (1 < i \leq j), \\ x_j & (i > j) \end{cases}$$

で定まる  $n$  次正方行列  $A_n = (a_{ij})$  の行列式の値を求めよ。

3. 区間  $[-1, 1]$  上の関数列  $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$  を

$$\phi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}, \quad x \in [-1, 1]$$

で定める. このとき, 次を示せ.

$$(1) \int_{-1}^1 \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad (n > m \geq 0),$$

$$(2) \int_{-1}^1 |\phi_n(x)|^2 dx = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1} \quad (n \geq 0).$$

ただし, (2) の途中計算において, Beta 関数

$$B(p, q) = \int_0^1 y^{p-1} (1-y)^{q-1} dy \quad (p, q > 0)$$

について,

$$B(n+1, n+1) = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

が成立することは用いてよい.

4.  $A$  を実  $n$  次正方行列とする. 次の問いに答えよ.

(1)  $\text{Im } A \cap \text{Im } (A - E) = \{\mathbf{o}\}$  と  $A(A - E) = O$  は同値であることを示せ.

(2)  $\text{Im } A^2 \cap \text{Im } (A - E)^2 = \{\mathbf{o}\}$  と  $A^2(A - E)^2 = O$  は同値であることを示せ.

ただし, 実  $n$  次正方行列  $B$  に対し,  $\text{Im } B = \{B\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$  であり,  $E$  は単位行列,  $\mathbf{o}$  は零ベクトル,  $O$  は零行列である.

5. 次の問いに答えよ.

(1) 正則関数に対するコーシーの積分定理を述べよ.

(2)  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} dx$  の値を求めよ.