大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成２８年度大学院前期課程入試問題

（数学）

【注意事項】

● 問題数は5題である．

● 問題用紙は表紙を入れて3枚である．
解答用紙は5枚である．裏面も使用してよい．
解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること．
解答用紙が不足する場合は追加を申し出ること．
すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
解答用紙は未使用や書き損じも含め，すべて提出すること．

● 試験終了後，問題用紙は持ち帰ってよい．

解答は各問題ごとに別々の解答用紙に記入すること．

1. 次の問いに答えよ．

(1) 平面内の閉領域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq x\}$ を考える．重積分

$$\iint_D x\,dxdy$$

を計算せよ．

(2) 関数 $f(x)$ は開区間 (a, b) で微分可能とし，x を (a, b) の任意の点とする．等式

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \to +0 \\ k \to +0}} \frac{f(x+h) - f(x-k)}{h+k}$$

を示せ．

2. 実数の無限数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の全体からなる集合を V とする．V の元 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ の和 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ とスカラー倍 $\lambda\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + \{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty} \qquad \lambda\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\lambda a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

と定義する．ただし，λ は実数である．以下の問いに答えよ．

(1) V はベクトル空間であることを示せ．

(2) V の 3 個の元 $\{(-1)^n\}_{n=0}^{\infty}, \{2^n\}_{n=0}^{\infty}, \{3^n\}_{n=0}^{\infty}$ は一次独立であることを示せ．

(3) V の元 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ で，漸化式

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

を満たすものの全体からなる集合を W とする．W は V の部分空間であることを示し，W の基底の一組を求めよ．

3.　留数定理を使って，広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$$

を計算せよ．

4.　平面全体で定義された関数 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-y^2+1$ を考える．

(1) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(2) 閉領域 $x^2+y^2 \leqq 4$ における $f(x,y)$ の最大値と最小値を求めよ．

5.　次の問いに答えよ．

(1) 複素数を成分とする n 次正方行列 A の固有値 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ は相異なるとし，p_i を λ_i に対する固有ベクトルとする．このとき，$p_1,\ldots,p_n$ は一次独立である．これを示せ．

(2) 行列

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

は対角化可能であるか否か．理由を付して答えよ．