大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成２９年度大学院前期課程入試問題

（数学）

- 問題用紙は表紙を入れて3 枚である．
- 問題数は5 題である．
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること．
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
- 裏面は使用しないこと．裏面に書いたものは無効である．
- 試験終了後，問題用紙は持ち帰ってよい．

1. (1) $D: 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ のとき，次の積分の値を求めよ．

$$\iint_D \frac{y}{(x+y)^2}\,dx\,dy.$$

(2) $a > 0$ として，球：$x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ と円柱：$x^2+y^2 \leq ax$ との共通部分 V の体積を求めよ．

2. $x^2+y^2+z^2=1$ という条件のもとで，実 2 次形式 $Q(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ の最大値を M とすれば，M は λ に関する方程式

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & h & g \\ h & b-\lambda & f \\ g & f & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

の解になっていることを証明せよ．

3.　$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 2)$ なる数列 $\{a_n\}$ を具体的に求め，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を求めよ．

4.　M を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次正方行列の作るベクトル空間とし，f を M から $\mathbb{C}$ への線型写像とする．このとき，

(1) $A \in M$ があって，すべての $X \in M$ に対して，$f(X) = \mathrm{Tr}(AX)$ であることを示せ．

(2) とくに，任意の $X, Y \in M$ に対して，$f(XY) = f(YX)$ が成立するならば，$c \in \mathbb{C}$ があって，$f(X) = c\,\mathrm{Tr}(X)$ であることを示せ．

ただし，$\mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$ は $X = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M$ のトレースである．

5.　次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\infty} \frac{(\log x)^2}{(x+1)^3}\, dx.$$