

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

## 平成30年度大学院前期課程入試問題

(数学)

- 問題用紙は表紙を入れて3枚である。
- 問題数は5題である。
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること。
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- 裏面は使用しないこと。裏面に書いたものは無効である。
- 試験終了後、問題用紙は持ち帰ってよい。

1. 次の積分の値を求めよ.

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$$

2.  $A$  を  $n$  次の実正方行列とする. このとき次の問に答えよ.

(1)  $A$  の転置行列を  $A^T$  で表すとき次を示せ.

$$\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$$

(2)  $\text{rank } A = 1$  ならば,  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}$  が存在して,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}$$

と表されることを示せ.

3. 関数  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  が

$$f(x, y) = xy \quad (x, y \in \mathbf{R})$$

で定義されているとき,  $f$  は条件

$$3x^4 + \frac{1}{8}y^2 - 1 = 0$$

のもとで最大値, 最小値をとることを示し, そのときの  $(x, y)$  の値を求めよ.

4.  $I$  は  $0$  を含む  $\mathbf{R}$  の開区間とし, 関数  $u: I \rightarrow \mathbf{R}$  は  $I$  のすべての点で 2 回微分可能で, 方程式

$$u''(x) + u(x) = (u(x))^3 \quad (\forall x \in I)$$

をみたすとする.  $x \in I$  に対し,

$$E(x) = 2(u'(x))^2 - (1 - (u(x))^2)^2$$

とおくとき, 次の間に答えよ.

- (1) すべての  $x \in I$  に対し  $E(x) = E(0)$  となることを示せ.
- (2)  $I = \mathbf{R}$  でかつ  $u(x)$  が  $\mathbf{R}$  上有界であれば,  $E(0) \leq 0$  となることを示せ.

5.  $V$  は  $2n$  次元実ベクトル空間とし,  $V_1, V_2$  は  $V$  の  $n$  次元部分空間で,  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$  とする. ただし,  $0$  は  $V$  の零ベクトルである. このとき次の間に答えよ.

- (1)  $V$  の  $n$  次元部分空間  $W \subset V$  に対して非負整数の組

$$(n_1, n_2) = (\dim(W \cap V_1), \dim(W \cap V_2))$$

はどのような値をとり得るか.

- (2) 2 つの  $n$  次元部分空間  $W, W' \subset V$  に対して

$$(\dim(W \cap V_1), \dim(W \cap V_2)) = (\dim(W' \cap V_1), \dim(W' \cap V_2))$$

であれば, 同型写像  $f: V \rightarrow V$  で

$$f(V_1) = V_1, \quad f(V_2) = V_2, \quad f(W) = W'$$

をみたすものが存在することを示せ.