大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

平成３１年度大学院前期課程入試問題

（数学）

- 問題用紙は表紙を入れて３枚である．
- 問題数は５題である．
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること．
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
- 裏面は使用しないこと．裏面に書いたものは無効である．
- 試験終了後，問題用紙は持ち帰ってよい．

1. $a>0$ とする．積分

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+a^2)^2}dx \qquad \text{および} \qquad \int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx$$

の値を求めよ．

2. 関数 $f(x,y)$ はすべての $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ において x および y に関して偏微分可能であるとする．

   (1) $b\in\mathbf{R}$ とする．すべての $x\in\mathbf{R}$ に対して

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,b)=0$$

   がなりたつならば，任意の $a_1,a_2\in\mathbf{R}$ に対して $f(a_1,b)=f(a_2,b)$ となることを証明せよ．

   (2) すべての $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ に対して

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

   がなりたつならば，$f(x,y)$ は定数関数であることを証明せよ．

3. A は 2 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，

   (1) A^7 を求めよ．

   (2) ベクトル $v\in\mathbf{R}^2$ の長さを $|v|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$ で表すとき，

   $$\max_{v\neq 0}\frac{|Av|^2}{|v|^2}$$

   を求めよ．

4. 次の問に答えよ．

(1) a を正の実数とするとき，次の等式がなりたつことを示せ．

$$\frac{d}{dx}\left[x\int_0^{ax} e^{-\eta^2}\,d\eta + \frac{1}{2a}e^{-a^2x^2}\right] = \int_0^{ax} e^{-\eta^2}\,d\eta$$

(2) σ を正の実数とする．

$$I(z) = \int_0^z \int_0^x \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{y^2}{\sigma^2}}\,dy\,dx$$

とおくとき，

$$\lim_{z\to\infty}\frac{I(z)}{z}$$

の値を求めよ．ただし，

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であることは証明せずに使ってもかまわない．

5. V を有限次元実ベクトル空間，$f : V \to V$ を線形写像とする．また，$id_V : V \to V$ を恒等写像とする．

(1) $f^3 = id_V$ であるとする．このとき，f が V のある基底によって対角化可能であるための必要十分条件は，$f = id_V$ であることを示せ．

(2) $f^2 = id_V$ であるとする．このとき，f が V のある基底によって対角化可能であることを示せ．