大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

令和２年度大学院前期課程入試問題

（数学）

- 問題用紙は表紙を入れて３枚である．
- 問題数は５題である．
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること．
- 各解答用紙の左上に，解答した問題の問題番号を記入すること．
- 裏面は使用しないこと．裏面に書いたものは無効である．
- 試験終了後，問題用紙は持ち帰ってよい．

1. $a>0$ とする．積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+a^4}dx$$

の値を求めよ．

2. 実 2 変数の函数

$$f(x,y)=(x+y)\,e^{-x^2-y^2}$$

の極値を求めよ．

3. 実 3 次正方行列の集合 $M_3(\mathbb{R})$ を，対応

$$(x_{ij})_{1\le i,j\le 3}\mapsto(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23},x_{31},x_{32},x_{33})$$

によって $\mathbb{R}^9$ と同一視する．また，$X=(x_{ij})_{1\le i,j\le 3}\in M_3(\mathbb{R})$ に対し，X のノルム $||X||$ を

$$||X||=\sqrt{\sum_{1\le i,j\le 3}x_{ij}^2}$$

で定める．以下の問題に答えよ．

(1) $A\in M_3(\mathbb{R})$ の行列式が0でないならば，ある $\epsilon>0$ が存在し，$||X-A||<\epsilon$ をみたすすべての $X\in M_3(\mathbb{R})$ に対し，X の行列式が0でないことを示せ．

(2) A を 3 次正方行列

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \frac{3}{2} & 1\\ -1 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

とする．このとき，$M_3(\mathbb{R})$ 内の点列 $\{A^n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限 $\lim_{n\to\infty}A^n$ を求めよ．

4. a を正の定数として，

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x + y^{1/2} + z^{1/3} \leq a^2,\ 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z\}$$

とするとき，積分

$$\iiint_V dxdydz$$

の値を求めよ．

5. x の多項式 $f(x)$ に対して，$\widetilde{f}(x)$ を

$$\widetilde{f}(x) = (1 - x + x^2)f''(x) + (1 + 2x)f'(x)$$

と定める．ただし，$f'(x)$, $f''(x)$ はそれぞれ $f(x)$ の一次導函数，二次導函数である．以下の問題に答えよ．

(1) 正の整数 n に対して，V を x の n 次以下の複素数係数の多項式すべてのなす複素ベクトル空間とするとき，$f(x)$ に $\widetilde{f}(x)$ を対応させる写像は V 上の線形変換であることを示せ．

(2) (1) で得られる線形変換の固有値すべてを求めよ．