大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

令和５年度大学院前期課程入試問題

（数学）

- 問題用紙は表紙を入れて３枚である．
- 問題数は５題である．
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること．
- 各解答欄の左上に，解答した問題の問題番号を記入すること．
- 解答用紙の裏面は使用しないこと．裏面に書いたものは無効である．

1. 実数直線 $\mathbb{R}$ から 1 点 x_0 を除いた集合において連続な関数 $f(x)$ に対して，

$$\lim_{\epsilon \to +0} \left(\int_{-\infty}^{x_0 - \epsilon} f(x)\, dx + \int_{x_0 + \epsilon}^{+\infty} f(x)\, dx \right)$$

が存在するとき，この値を積分の主値（principal value of integration）といい，p.v. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ と表す．次の値を求めよ．

$$\text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3 - 1}\, dx.$$

2. 点 $\mathrm{P}(x,\, y)$ が $\mathbb{R}^2$ 平面上の曲線 $x^2 + y^2 + 2axy = 1$ を動くとき，関数

$$f(x,\, y) = xy$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $a = -\dfrac{1}{2}$ のときの f の最大値・最小値を調べよ．

(2) a を正の実数とするときの f の最大値・最小値を調べよ．

3. z_0 を 0 でない複素数として，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を複素数列とする．以下の主張は正しいか否か，正しければ証明し，誤りであれば反例を挙げよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ が絶対収束するならば，$|z| \leq |z_0|$ となる任意の複素数 z に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する．

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ が収束するならば，$|z| < |z_0|$ となる任意の複素数 z に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は絶対収束する．

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ が収束するならば，$|z| = |z_0|$ となる任意の複素数 z に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束する．

4. 実3次正方行列の集合を$\mathbb{R}^{3\times 3}$で表し，$A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$のノルムを$\|A\|=\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq 3}a_{ij}^2}$で定義する．以下の問いに答えよ．

(1) 直交行列を用いて，次の$S\in\mathbb{R}^{3\times 3}$を対角化せよ．

$$S=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

(2) $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$とふたつの任意の直交行列$U, V\in\mathbb{R}^{3\times 3}$に対して$\|UAV\|=\|A\|$が成り立つことを示せ．

(3) (1) のSに対して，$\|S-X\|=1$となる階数2の$X\in\mathbb{R}^{3\times 3}$をひとつ求めよ．

5. mを正の実数として，$\mathbb{R}^2$上の関数fを

$$f(x,\, y)=\frac{x^2-y^2}{1+(x^2+y^2)^m}$$

とする．以下の問いに答えよ．

(1) fが最大値をもつためのmに対する必要十分条件を求めよ．

(2) 次の積分が収束するためのmに対する必要十分条件を求めよ．

$$\iint_{\mathbb{R}^2}|f(x,\, y)|\,dxdy.$$