大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

令和６年度大学院前期課程入試問題

（数学）

- 問題用紙は表紙を入れて３枚である．
- 問題数は５題である．
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること．
- 各解答欄の左上に，解答した問題の問題番号を記入すること．
- 解答用紙の裏面は使用しないこと．裏面に書いたものは無効である．

1. $\mathbb{R}^3$ 空間における，次の集合 A と B との共通部分の体積 V を求めよ．

$$A = \left\{ (x,\, y,\, z) \,\middle|\, x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 \leq 9 \right\},$$

$$B = \left\{ (x,\, y,\, z) \,\middle|\, x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 3x \right\}.$$

2. $\mathbb{R}^2$ 平面上の関数

$$f(x,\, y) = (x+y)^2 + (xy-k)^2 \qquad (k > 0,\, k \neq 2)$$

の極値を求めよ．

3. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = 1$ なる単調増加な実数列として，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$b_n = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加であることを示せ．

(2) $\sup\{\, a_n \mid n = 1,\, 2,\, \ldots \,\} < 2$ ならば，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

(3) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が有界ならば，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

4. A は正則な n 次実正方行列とする．以下の問いに答えよ．

(1) ある直交行列 Q と上三角行列 R が存在して，

$$A = QR$$

と分解できることを示せ．ただし，行列 R の対角成分はすべて正とする．

(2) (1) における分解が一意的であることを示せ．

(3) (1) の Q と R について，RQ の固有値が A の固有値と一致することを示せ．

5. a を実数として，

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & -a-1 \\ -1 & a+3 & -a \\ -1 & a+1 & -a+2 \end{pmatrix}$$

とおく．正の整数 n に対し，A^n を求めよ．