大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

令和７年度大学院前期課程入試問題

（数学）

- 問題用紙は表紙を入れて３枚である．
- 問題数は５題である．
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること．
- 各解答欄の左上に，解答した問題の問題番号を記入すること．
- 解答用紙の裏面は使用しないこと．裏面に書いたものは無効である．

1. 次の A, $\mathbf{b}$ に対して連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 3 \\ 6 & 13 & 3 & 4 \\ 7 & 16 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 25/3 \\ 73/6 \\ 35/2 \\ a \end{pmatrix}.$$

(1) 行列 A の階数 (rank) を求めよ.

(2) 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解が存在するような実数 a を求めよ.

2. 放物線 $x + y^2 - 4 = 0$ 上に点 (x_1, y_1), 放物線 $x - y^2 + 4 = 0$ 上に点 (x_2, y_2) をとるとき, 関数

$$f(x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

の極値を求めよ.

3. 実数値関数 $y(x)$ が閉区間 $[0,\, 1]$ で連続, 開区間 $(0,\, 1)$ で $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ をみたすとする. ただし, λ は実定数とする. 以下の 2 つの主張はそれぞれ正しいか否か. 正しければ証明し, 誤りであれば反例をあげよ.

(1) $\lambda \leq 0$ ならば, $y(x)$ は閉区間 $[0,\, 1]$ で恒等的に 0 である.

(2) $\lambda > 0$ ならば, $y(x)$ は閉区間 $[0,\, 1]$ で恒等的に 0 である.

4. $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数列，f を $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数とする．以下の３つの主張はそれぞれ正しいか否か．正しければ証明し，誤りであれば反例をあげよ．

(1) 任意の $x \in [0, \infty)$ に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$.

(3) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ および $\int_0^\infty f_n(x)\,dx$ が有限な値をとるとき，
$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx$.

5. λ を $|\lambda| < 1$ をみたす複素数とする．

(1) n と k を正の整数とするとき，$\lim_{n\to\infty} \lambda^n n^k = 0$ を示せ．

(2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda+2 & -1 & -3 \\ -3 & \lambda+1 & 4 \\ 2 & -1 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

に対し，$\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．