大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

令和８年度大学院前期課程入試問題

（数学）

- 問題用紙は表紙を入れて３枚である．
- 問題数は５題である．
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること．
- 各解答欄の左上に，解答した問題の問題番号を記入すること．
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること．
- 解答用紙の裏面は使用しないこと．裏面に書いたものは無効である．

1. 以下の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\sin t}{1+t^2}\,dt$ および $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{t\sin t}{(1+t^2)^2}\,dt$ の値を求めよ．

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ に対し，

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (t\sin t)(t^2E + A^2)^{-1}\,dt$$

を求めよ．ただし，E は単位行列である．また，行列値関数の積分は各要素の積分で定義するものとする．

2. $\mathbb{R}^2$ 平面上の関数

$$f(x,\, y) = (1+2x^2)ye^{-x^2-y^2}$$

の極値を求めよ．

3. f を $[0,\, \infty)$ 上の実数値連続関数とする．以下の 2 つの主張はそれぞれ正しいか否か．正しければ証明し，誤りであれば反例をあげよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ と広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty (f(x))^2\,dx$ がともに収束するならば，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty (f(x))^3\,dx$ は収束する．

(2) 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ が収束するならば，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ は収束する．

4. a, b を実数とする．次の問いに答えよ．

(1) 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\,dx$$

は $a>0,\ b>0$ であれば収束することを示せ．

(2) 広義積分

$$\iint_{x\geq 0,\ y\geq 0} \frac{1}{1+x^a+y^b}\,dxdy$$

は

$$a>1,\ b>1,\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$$

であれば収束することを示せ．

5. n を正の整数として，$M_n(\mathbb{R})$ を n 次実正方行列全体のなすベクトル空間とする．任意の $A=(a_{ij})\in M_m(\mathbb{R})$, $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ に対して，$M_m(\mathbb{R})$ から $M_{mn}(\mathbb{R})$ への写像 φ_B を

$$\varphi_B(A)=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}$$

と定める．以下の問いに答えよ．

(1) 任意の行列 $A, C\in M_m(\mathbb{R})$, $B, D\in M_n(\mathbb{R})$ に対して，$\varphi_B(A)\varphi_D(C)=\varphi_{BD}(AC)$ が成立することを示せ．

(2) $\varphi_B(A)$ の転置行列は A, B の転置行列 ${}^tA, {}^tB$ を用いて $\varphi_{{}^tB}({}^tA)$ と表されることを示せ．

(3) $A\in M_m(\mathbb{R})$, $B\in M_n(\mathbb{R})$ が可逆行列であるとき，$\varphi_B(A)$ も可逆行列であることを示せ．

(4)

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

のときの $\varphi_B(A)$ を直交行列を用いて対角化せよ．