平成 31 年度
大阪大学 大学院情報科学研究科 博士前期課程
情報数理学専攻
入学者選抜試験問題

情報数理学

平成 30 年 8 月 4 日 9:00 – 12:00

（注意）

1. 問題用紙は指示があるまで開いてはならない。
2. 問題用紙は表紙を含めて 7 枚、解答用紙は 6 枚である。さらに選択科目確認票 1 枚がある。試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷が不鮮明な場合は直ちに申し出ること。
3. 問題は「情報基礎」、「数理基礎」、「数学解析」、「情報物理」の 4 科目よりなる。このうち、2 科目を選択して解答すること。3 科目以上を選択・解答した場合はすべての答案を無効とすることがある。
4. 解答は科目ごとに 3 枚（大問ごとに 1 枚）の解答用紙に記入すること。
   解答用紙には、解答する選択科目名（情報基礎・数理基礎・数学解析・情報物理のいずれか）と大問番号、ならびに受験番号を必ず記入すること。
5. 解答用紙の追加は認めない。
6. 選択科目確認票に受験番号ならびに解答した科目を必ず記入し、解答用紙とともに提出すること。
7. 問題用紙の余白は下書きに用いてよい。
8. 問題用紙および解答用紙は持ち帰ってはならない。

[情報基礎]

1. 配列 T に n 個、配列 P に m 個、それぞれ一桁の非負の整数値（$0, 1, \ldots, 9$ のどれか）が格納されているとし、それらを $T[1], T[2], \ldots, T[n]$ および $P[1], P[2], \ldots, P[m]$ と書く。ただし、$n > m$ である。アルゴリズム A

```
t ← 0
p ← 0
for i ← 1 until m do
    t ← 10t + T[i]
    p ← 10p + P[i]
end for
for s ← 0 until n − m do
    if t = p then
        print s
    end if
    if s < n − m then
        t ← 10t + T[s + m + 1] − 10^m T[s + 1]
    end if
end for
```

およびアルゴリズム B

```
for s ← 0 until n − m do
    c ← 0
    for i ← 1 until m do
        if [    (a)    ] then
            c ← c + 1
        end if
    end for
    if c = m then
        print s
    end if
end for
```

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $n = 8, m = 2$ であり、$T[1], T[2], \ldots, T[8]$ には 7, 4, 7, 8, 9, 4, 7, 2 が、$P[1], P[2]$ には 4, 7 が、それぞれこの順に格納されているとする。アルゴリズム A を実行するとき、表示される数字の列を示しなさい。

(2) アルゴリズム B がアルゴリズム A と同じ機能をもつように、空欄 (a) を埋めなさい。

(3) 比較（`if` 文）の実行回数をアルゴリズムの時間計算量とするとき、アルゴリズム A と B のそれぞれについて、時間計算量と n, m の関係を示しなさい。

（次ページにつづく）

2. 行列の積 $P_1P_2\cdots P_N$ の計算について考える。ただし、各行列は $P_1 \in \mathbb{R}^{q_0\times q_1}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{q_1\times q_2}, \ldots, P_N \in \mathbb{R}^{q_{N-1}\times q_N}$ であるとする。なお、この問題を通して、行列 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ と $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ の積は定義 $AB = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}] \in \mathbb{R}^{m\times \ell}$ にしたがって計算することとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 行列の積 $P_1P_2P_3$ の計算を、括弧付けに従って $(P_1P_2)P_3$ および $P_1(P_2P_3)$ の順に行うときのスカラー乗算の回数を、それぞれ示しなさい。

(2) 行列の積 $P_sP_{s+1}\cdots P_t$ $(1 \leqq s \leqq t \leqq N)$ の計算に必要なスカラー乗算の最小回数を $\alpha[s,t]$ とする。$s = t$ のときは $\alpha[s,t] = 0$ である。$s < t$ のときの $\alpha[s,t]$ を、$\alpha[s,r]$, $\alpha[r+1,t]$ $(s \leqq r \leqq t-1)$ を使って表しなさい。

(3) 各行列を $P_1 \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $P_2 \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $P_3 \in \mathbb{R}^{5\times 2}$, $P_4 \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ とする。$\alpha[s,t]$ $(1 \leqq s \leqq t \leqq 4)$ を求めなさい。そして、行列の積 $P_1P_2P_3P_4$ の計算に必要なスカラー乗算の回数が最小となる括弧付けを示しなさい。

3. 有向グラフ $G = (V, E)$ を探索するアルゴリズム S

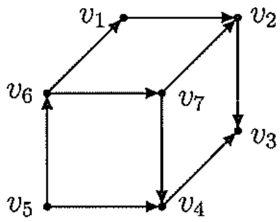
1　L を空のリストとする
2　すべての頂点 $v \in V$ について $T(v)$ を実行する

について考える。ただし、関数 $T(v)$ は

3　`function` $T(v)$
4　`if` v に訪問済みの印がない `then`
5　　v に訪問済みの印を付ける
6　　始点が v のすべての有向辺の終点 w について $T(w)$ を実行する
7　　v を L の先頭に追加する
8　`end if`

で定義されている。また、対象とするグラフ G は、有向閉路、自己ループ、多重辺をもたないとする。以下の問いに答えなさい。

(1) 下図のグラフを対象にアルゴリズム S を実行するとき、訪問済みの印の付く順に頂点を並べるとともに、実行後のリスト L を示しなさい。ただし、2 行目と 6 行目の頂点の実行順は、適当に定めてよい。



(2) アルゴリズム S の実行後のリスト L で v_i が v_j より前にあるとき、グラフ G に始点が v_j、終点が v_i の有向辺は存在しないことを示しなさい。

(3) グラフ G がハミルトン路（有向辺に沿って全頂点を一度ずつ通る道）をもつとき、アルゴリズム S の実行後のリスト L は、2 行目と 6 行目の頂点の実行順によらず、一意になることを示しなさい。

[数理基礎]

1. $n\ (\geqq 3)$ 個の変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ をもつ線形計画問題

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{P:} & \text{最小化} & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\
& \text{条件} & 2x_1 + x_2 \geqq 1 \\
& & x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} \geqq 1, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \\
& & x_{n-1} + 2x_n \geqq 1 \\
& & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0
\end{array}
$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) P の双対問題を示しなさい。

(2) $n = 3$ のとき、P の最適値を求めなさい。

(3) n が奇数のとき、P の最適値を求めなさい。

2. 長さ L の棒を 2 つに折り、短い方を捨てて、残った棒の長さを X とする。ただし、棒を折る位置は一様分布に従うとする。以下の問いに答えなさい。

(1) X の期待値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{V}[X]$ を求めなさい。

(2) この長さ X の棒をさらに 2 つに折り、短い方を捨てて、残った棒の長さを Y とする。Y の期待値 $\mathrm{E}[Y]$ と分散 $\mathrm{V}[Y]$ を求めなさい。

3. 体温計の温度センサーで計測されたデータから、体温 u を推定することを考える。体温計を身体に接触させ始めた時刻を $t = 0$ とするとき、時刻 $t \geqq 0$ に計測される温度 X_t は、各時刻独立に、平均 $u + \alpha^t(u_0 - u)$、分散 σ^2 の正規分布に従うとする。ただし、室温 u_0、分散 $\sigma^2 > 0$、実数 $\alpha \in (0, 1)$ は既知の定数である。以下の問いに答えなさい。

(1) ある時刻 $t > 0$ に $X_t = x$ が計測されたとき、u の最尤推定量 $\hat{u}$ を求めなさい。

(2) 時刻 $t = 1, 2, \ldots, n$ に $X_t = x_t$ が計測されたとき、u の最尤推定量 $\hat{u}_n$ を求めなさい。

(3) (2) の最尤推定量 $\hat{u}_n$ が不偏推定量であるか答えなさい。

[数学解析]

1. 2 以上の整数 n に対して、$\omega^n = 1, \omega^k \neq 1, k = 1, 2, \ldots, n-1$ とする。

(1) 複素数 z に対して、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$z^n - 1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$$

(2) 複素数 z に対して、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega^k) = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$$

(3) (2) より、$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = n$ となることを用いて、次の式が成り立つことを示しなさい。

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

2. 微分方程式 $\ddot{x} + 2\dot{x}\tan t - x = 0$ について、以下の問いに答えなさい。

(1) $x_0 = \sin t$ は微分方程式の解となることを示しなさい。

(2) 微分方程式の一般解を求めなさい。

3. 2π 周期関数に対する複素型フーリエ級数のフーリエ係数を c_n とし、

$$\lim_{n\to\infty} n^k c_n = 0$$

となる最大の整数を k とする。3 つの 2π 周期関数 $f(x), g(x), h(x)$ について、k の値の小さい順に並べなさい。また、その理由も答えなさい。

$$f(x) = x,\ -\pi < x \leqq \pi$$

$$g(x) = |x|,\ -\pi < x \leqq \pi$$

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}(x+\pi)^2 + \pi, & -\pi < x \leqq -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}x^2, & -\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{2}{\pi}(x-\pi)^2 + \pi, & \dfrac{\pi}{2} < x \leqq \pi \end{cases}$$

[情報物理]

1. 半径がそれぞれ a, b $(a < b)$ の円筒状の導体（以下、電極）を同軸に配置したコンデンサがある。円筒の長さは a, b それぞれよりも十分に大きい。真空中でコンデンサの内側の電極に単位長あたり $\rho\ (> 0)$、外側の電極に単位長あたり $-\rho$ の電荷を与えた。なお、真空の誘電率を ϵ_0 とする。

(1) 電極間の電位差を求めなさい。

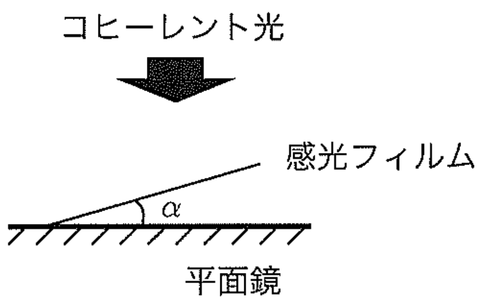
(2) このコンデンサの単位長あたりの静電容量を求めなさい。

(3) 電極間に誘電体を満たすと静電容量が増える。これはどのような現象によるものか説明しなさい。

2. (1) 波面が平面で、ベクトル $(0, \cos\theta, \sin\theta)$ の方向に進む正弦波の変位 $u_1(x, y, z, t)$ を、振幅 A、波長 λ、角振動数 ω を用いて表しなさい。ただし、(x, y, z) は空間座標、t は時間、θ は定数であり、$x = y = z = t = 0$ における位相は 0 とする。

(2) (1) の正弦波と、これとは進行方向のみが異なる（ベクトル $(0, \cos\theta, -\sin\theta)$ の方向に進む）別の正弦波が空間内に同時に存在するときの変位 $u_{12}(x, y, z, t)$ を求め、その波のふるまいについて、y 方向と z 方向に分けて説明しなさい。

(3) 図のように、平面鏡上に、非常に薄い感光フィルムがわずかな角度 α だけ傾けて置かれている。平面鏡に対し、振幅が一様な平面波のコヒーレント光を垂直入射させたとき、フィルムはどのように感光されるか説明しなさい。



（次ページにつづく）

3. 原点 O においた点光源を、別の位置 P で観測することを考える。点光源を囲む任意の面を S、S 上の一点を Q、点 O から点 Q までの距離を r_0、点 Q から点 P までの距離を r とすると、位置 P での光学的変位 u_P は

$$u_\mathrm{P} = \int_\mathrm{S} \frac{Ae^{ikr_0}}{r_0} \frac{Be^{ikr}}{r} e^{-i\omega t}\, d\sigma \qquad (*)$$

とかける。ただし、$d\sigma$ は面 S 上の微小な面要素、k は波数、ω は角振動数、B は傾斜因子、A は光源強度、t は時間、i は虚数単位である。

(1) 光の伝搬に関する以下の文章の空欄 $\boxed{}$ に入れるべき適切な語句を答えなさい。ただし、(b) は示された語句の中から選びなさい。
光源から伝搬してきた光波（1次波）がある瞬間に作る $\boxed{\text{(a)}}$ 上の各点は、この1次波と同じ角振動数をもつ2次波の光源として作用する。各2次波は $\boxed{\text{(b) 平面波・球面波}}$ として伝搬する。任意の点での光学的変位は、すべての2次波の光学的変位の $\boxed{\text{(c)}}$ となる。

(2) (1) の説明文と式 (*) の対応関係を説明しなさい。

(3) $B = \dfrac{1}{i}\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{1+\cos\theta}{2}$ とかける。ただし、λ は波長、θ は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ のなす角である。B における因子 $\dfrac{1}{i}$ は、1次波と2次波がどのような関係にあることを示しているか、答えなさい。

(4) 点 O と点 P の間に開口を挿入したときの u_P は、式 (*) の S を開口面に限定することで得られる。この式では、ホイヘンスの原理では説明できなかった光の伝搬に関するいくつかの事実を説明することができる。その例を1つ挙げなさい。