

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

令和4年度大学院前期課程入試問題

(数学)

- 問題用紙は表紙を入れて3枚である。
- 問題数は5題である。
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること。
- 各解答欄の左上に、解答した問題の問題番号を記入すること。
- 裏面は使用しないこと。裏面に書いたものは無効である。

1. 微分方程式

$$x \frac{dy}{dx} + y = x^3 + x, \quad x > 0$$

の一般解を求めよ.

2. a を正の定数として,

$$V = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq a^2\}$$

とすると、積分

$$\iiint\limits_V dx dy dz dw$$

の値を求めよ.

3. $f(x)$ は \mathbb{R} 上の実数値連続関数であり, $x \neq 0$ で微分可能とする. 以下のふたつの主張はそれぞれ正しいか否か. 正しいければ証明し, 誤りであれば反例をあげよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = c$ となる実数 c が存在するならば, $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能である.

(2) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能ならば, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = c$ となる実数 c が存在する.

4. $M(m, n)$ を実 (m, n) 行列全体の集合とし, 成分の対応によって $M(m, n)$ を \mathbb{R}^{mn} と同一視する. また, 写像 $f: M(m, n) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(X) = \text{rank } X$ で定める.

(1) $A \in M(n, n)$ が $f(A) = n$ をみたすとする. f が A において連続かどうか調べよ.

(2) $r \in f(M(m, n))$ とする. $A \in M(m, n)$ が $f(A) = r$ をみたすとき, f が A において連続かどうか調べよ.

5. 実2次正方行列 A に対して,

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

と定義する.

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ に対して e^A を求めよ.

(2) 等式 $e^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ をみたすような, A をひとつ求めよ.