

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

令和3年度大学院前期課程入試問題

(数学)

- 問題用紙は表紙を入れて3枚である。
- 問題数は5題である。
- すべての解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
- 解答は各問題ごと別々の解答用紙に記入すること。
- 各解答欄の左上に、解答した問題の問題番号を記入すること。
- 裏面は使用しないこと。裏面に書いたものは無効である。

1. 積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta} d\theta$$

の値を求めよ.

2. 微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 3y = \cos x$$

の一般解を求めよ.

3. 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は2階微分可能で, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ が収束し, さらに全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f''(x) \geq 0$ であるとする. このとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ であることを示せ.

4. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3a - 3b + 14 & 15 \\ -2 & a - b + 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3a - b \\ 2 & 3a + b \\ 3 & 3a + b \end{pmatrix}$$

に対し, 列ベクトル空間 \mathbb{R}^3 の部分空間 V, W を

$$V = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{u} = \mathbf{0}\}, \quad W = \{B\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2\}$$

で定める. ただし, a, b は実数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) V の基底を一組求めよ.
- (2) W の基底を一組求めよ.
- (3) $V + W$ が V と W の直和になるような実数の組 (a, b) の必要十分条件を求めよ.

5. 3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

が定める列ベクトル空間 \mathbb{R}^3 上の線型変換 $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ に対して, $T_A(V) \subset V$ を
みたす \mathbb{R}^3 の2次元部分空間 V すべてを求めよ.