平成26年度第11回情報数理学セミナー

日時 ： 平成２６年１１月２７日（木）　１４：４０～１６：１０
場所 ：　吹田キャンパス 情報棟Ａ１０９室

特別講演

講師 ： 壁谷 喜継　(大阪府立大学大学院工学研究科・教授)
講演題目 ：
　球面上での領域のラプラス・ベルトラミ作用素の固有値と関連する非線形問題
アブストラクト：別紙参照

球面上での領域のラプラス・ベルトラミ作用素の固有値と関連する非線形問題

壁谷　喜継（大阪府立大学）

1　序

本講演の内容は，Prof. C. Bandle (Univ. Basel), 川上竜樹氏（大阪府立大学），小坂篤志氏（大阪市立大学），二宮広和氏（明治大学）との共同研究に基づく．

講演の初めは，線形偏微分方程式

$$\Lambda u + \lambda u = 0, \quad \text{in } \Omega(\varepsilon) \subset \mathbb{S}^n \tag{1.1}$$

を球面上の領域 $\Omega(\varepsilon)$ で考える．ここで， Λ は球面 $\mathbb{S}^n$ での Laplace-Beltrami 作用素, 次元 n は $n \geq 2$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ は小さいパラメータである．$\Omega(\varepsilon)$ は測地半径 $\pi - \varepsilon$ の測地球である．境界条件は，Dirichlet, Neumann 条件のみならず，第三種境界条件も考える．

後半では，以下のような非線形問題の解の分岐ついても考察する．

$$\Lambda u + \lambda(-u + |u|^{p-1}u) = 0, \quad \text{in } \Omega(\varepsilon) \subset \mathbb{S}^n \ (p > 1) \tag{1.2}$$

領域が球面全体のとき， $-\Lambda$ の固有値・固有関数はよく知られており，k 番目の固有値 ($k = 0$ から数える) は $k(k+n-1)$ であり，その多重度は

$$(2k + n - 1)\frac{(k + n - 2)!}{(n - 1)!k!}\text{である．}$$

では，本問題のような領域の摂動はどのような影響を固有値にあたえるのであろうか？ 非線形問題の分岐を調べるにあたり，線形問題の固有値の情報は非常に重要である． そのため，固有値がどのようなものである

かをまず調べる．このため，ラプラス・ベルトラミ作用素を極座標表示して考える．簡単のため，$n = 2$ の場合を記す．このときは，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \lambda u = 0 \tag{1.3}$$

となり，これを変数分離 $u(\theta, \phi) = \Phi(\theta)\Psi(\phi)$ で解くことになる．

境界条件はまず，Neumann 条件 $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ をおく．なお， Tichmarsh の本 (“Eigenfunction Expansion Part 1” (1962)) に従った議論を行えば，**固有関数は変数分離形のみ（変数分離形で完全系）**であることがわかる．（吉田耕作「微分方程式の解法第 2 版」の§ 90，91 にも本質的には同様な記述がある.） 従って，変数分離形で考えれば十分である．すると，Φ と Ψ は

$$\sin^2\theta(\Phi''(\theta) + (\cot\theta)\Phi'(\theta) + \lambda\Phi) = -\frac{\Psi''(\phi)}{\Psi(\phi)} = m^2$$

を満たすことがわかる．ここで $m = 0, 1, 2, \ldots.$

まず，$\Psi(\phi) = c_1 \cos m\phi + c_2 \sin m\phi$ がわかる．$m = 0$ のときは，$\Psi(\phi) \equiv 1$ とみなす． また， Φ は **Legendre の陪微分方程式**

$$\Phi''(\theta) + (\cot\theta)\Phi'(\theta) + (\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta})\Phi = 0 \tag{1.4}$$

を満たす． パラメータを $\lambda = \nu(\nu + 1)$ とおき，非負の ν をとる． すると，定数倍を除いて，第一種の Legendre 陪関数 (整数以外の ν に対しては，実は Ferrers による) $P_\nu^m(\cos\theta)$ が (1.4) の解である． ν は境界条件

$$\frac{d}{d\theta} P_\nu^m(\cos(\pi - \varepsilon)) = 0.$$

から決まる．ここから，どのように固有値が決定されるかを講演では解説する．